Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NEGRILĂ, ANTON
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 12-a. - Pitești : Paralela 45, 2023-
2 vol.
ISBN 978-973-47-3885-4
Partea 1. - 2023. - ISBN 978-973-47-3886-1

I. Negrilă, Maria

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea I

ediția a XII-a

mate 2000 – consolidare

Recapitulare şi evaluare iniţială

PE Teste cu exerciţii şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării iniţiale

ALGEBRĂ

✹ TESTUL 1 ✹

1. a) Se consideră numerele:

$a = (-4) \cdot (+6) - [(-24) : (+3) - (-28) : (-7) - (+16) : (-8)]$ şi

$b = [(-6) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3) - (-7) \cdot (-3)] : (-12 + 15)$.

Calculați $n = a - b$.

b) Se consideră numerele:

$x = (-3) \cdot (+7) - [(-18) : (+3) - (+24) : (-6) + (-32) : (-4)] \cdot (-11 + 9)$ şi

$y = [(-7) \cdot (+4) - (-8) \cdot (+3) - (-6) \cdot (-2)] : (-6 + 8)$.

Calculați $n = x + y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $27 - 3(2x - 3) = 18$; b) $2(3x + 4) - 15 = 11$;

c) $2(5x - 13) + 33 = 3(2x + 1) + 20$; d) $3x + 5 - 2(x + 2) = 8 + 3(x - 1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $11 - 2(3x - 4) > 1$; b) $2(2x + 1) + 13 \leq 3(x - 1) + 22$;

c) $17x + 19 \leq 6(2x + 5) + 2(x - 5) + 11$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 3| \leq 2$; b) $|2x + 5| < 9$; c) $2[3 \cdot |2x - 7| - 7] - 23 < 17$.

5. Determinați valorile întregi ale lui n, pentru care:

a) $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{3n+14}{n+2} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{4n+7}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{3n+8}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

6. Calculați:

a) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right)$; b) $\left(+\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{32}\right) - \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot \left(+\frac{21}{32}\right)$;

c) $\left(-\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) - \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{22}\right)$;

d) $\left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{7}{20} + \frac{4}{15}\right)$.

7. Numerele 377, 517 și 803, împărțite la același număr natural nenul n, dau câturile nenule și resturile egale cu 17, 13 și, respectiv, 11. Determinați valorile împărțitorului n.

8. Determinați cel mai mic număr natural n, care împărțit pe rând la 20, 24 și, respectiv, 28, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 14, 18 și, respectiv, 22.

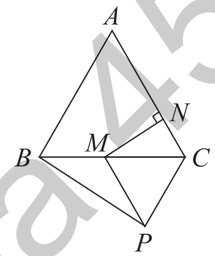
GEOMETRIE

TESTUL 1

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$, iar $N \in AC$ și $BN \cap CM = \{P\}$. Arătați că:

a) $BN \equiv CM$; b) $PM \equiv PN$; c) $AP \perp BC$.

2. În figura alăturată, triunghiurile ABC și PMC sunt echilaterale, punctul M este mijlocul laturii BC, iar punctul N este piciorul perpendicularei duse din M pe latura AC.



a) Arătați că dreptele AB și CP sunt paralele.

b) Calculați măsura unghiului ABP.

c) Dacă pe semidreapta AB se ia un punct T astfel încât punctul B să fie interior segmentului AT, iar $BT = \frac{AB}{2}$, arătați că punctele T, M și N sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul ABC, iar punctul D este mijlocul laturii BC, astfel încât $AD \equiv BD \equiv CD$.

a) Arătați că $\sphericalangle BAC = 90°$. b) Dacă $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$, arătați că $BC = 2AB$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$, în care punctele D și E sunt mijloacele laturilor AC și AB. Știind că punctul M este simetricul punctului C față de E și N este simetricul punctului B față de D, demonstrați că:

a) $BD \equiv CE$; b) $AM \equiv AN$;

c) punctele M, A, N sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$ și $N \in AC$, iar $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că:

a) $BN \equiv CM$; b) ΔBPC este isoscel;

c) semidreapta AP este bisectoarea unghiului BAC.

TESTUL 2

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $N \in AB$ și $P \in AC$, astfel încât $BN \equiv CP$, iar $BP \cap CN = \{M\}$. Arătați că:

a) $BP \equiv CN$; b) $NP \parallel BC$; c) Triunghiul BMC este isoscel.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle BAC = 90°$, iar punctul D este mijlocul ipotenuzei BC. Se notează cu E simetricul punctului A față de punctul D. Arătați că:

a) $AB \equiv CE$; b) $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BAC$; c) $AD = \frac{BC}{2}$.

3. În triunghiul ABC, BM și CN sunt înălțimi, $M \in AC$ și $N \in AB$. Pe semidreapta MB se ia punctul P astfel încât $BP \equiv AC$, punctul B fiind interior segmentului PM, iar pe semidreapta NC se ia punctul T astfel încât $CT \equiv AB$, punctul C fiind interior segmentului NT. Arătați că:

a) $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACT$; b) $AP \equiv AT$; c) $\sphericalangle PAT = 90°$.

Algebră

Capitolul I
Mulţimea numerelor reale

PP Competențe specifice

- **C1.** Identificarea numerelor aparţinând diferitelor submulţimi ale lui $\mathbb{R}$
- **C2.** Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea şi aproximarea numerelor reale
- **C3.** Utilizarea unor algoritmi şi a proprietăţilor operaţiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- **C4.** Folosirea terminologiei aferente noţiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- **C5.** Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- **C6.** Modelarea matematică a unor situaţii practice care implică operaţii cu numere reale

Rădăcina pătrată

PE-PP **1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect**

• Numărul natural x se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg a cu proprietatea că $x = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

• Numărul $|a|$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x și se notează cu $\sqrt{x}$.

• $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr întreg x.

Observaţii: Dacă x este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este x, și anume $\sqrt{x}$ și $-\sqrt{x}$. Evident că numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{x^2} = |a|$.

a) $x = a^2$ implică $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a|$. b) Dacă $a \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple: $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$; $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$;

$\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{(5xy^2)^2} = |5xy^2| = 5y^2|x|$.

activități de învățare

PE Înțelegere *

1. Copiați și completați următorul tabel ($x \in \mathbb{Z}$):

x	-5	-3	-2	0			9	12
x^2					16	36		

2. a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mici decât 90.
b) Scrieți toate numerele pătrate perfecte cuprinse între 140 și 290.
c) Scrieți pătratele perfecte de trei cifre, mai mari ca 300.

3. Determinați numerele raționale care au pătratul egal cu:
a) 25; b) 64; c) 121; d) 729; e) 1296.

4. Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:
a) 36; b) 64; c) 1; d) 169; e) 324; f) 529;
g) $2^8 \cdot 81$; h) $49 \cdot 64 \cdot 5^2$; i) $4^3 \cdot 5^6$; j) $16^3 \cdot (-5)^4$; k) $121 \cdot 169^3$.

5. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:
a) 36; 4; 15; 56; 169; 190; 196; 225; 240; 256;
b) 13^2; $(-9)^4$; 3^8; $(-7)^5$; 18^3; $(-12)^{18}$; $(-21)^7$; $(-28)^6$;
c) 5^{8n}; 7^{6n+4}; 28^{n^4+1}; 15^{n^2+n}; 12^{n^2-n+6}, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Fie $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$.
a) Determinați elementele mulțimii B.
b) Determinați elementele mulțimii $C = \left\{z \mid z = \sqrt{y},\ y \in B\right\}$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $\sqrt{64} = 8$; b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$; c) $\sqrt{123^2} = 123$;
d) $\sqrt{(-432)^2} = 432$; e) $\sqrt{49a^2} = 7a,\ a < 0$; f) $\sqrt{(-25a^2)^2} = 5a^2$;
g) $\sqrt{(-64a)^4} = 8a^2$; h) $\sqrt{81a^8b^2} = 9a^4b,\ b < 0$.

8. Rezolvați ecuațiile:
a) $x^2 = 36$; b) $x^2 = 1600$; c) $5x^2 = 245$;
d) $-2x^2 = -72$; e) $x^2 + 9 = 265$; f) $x^2 - 14 = 155$;
g) $-3x^2 + 175 = -257$; h) $-2x^2 + 27 = -101$; i) $(x-3)^2 = 4$;
j) $(x+4)^2 = 9$; k) $25 - (x+3)^2 = 9$; l) $-144 - (x-5)^2 = -225$;
(i) în mulțimea numerelor naturale;
(ii) în mulțimea numerelor întregi.

9. Folosind formula $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, unde $a \neq 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, calculați:
a) $\sqrt{x+1}$, unde $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{201}$;
b) $\sqrt{2x+1}$, unde $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{249}$;
c) $\sqrt{4x+1}$, unde $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{359}$;
d) $\sqrt{8x+1}$, unde $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{98}$;

PE

Nume ______________________________ Clasa ________

Test de autoevaluare

• *Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 100 de minute.*

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. (3 puncte)

(0,5p) **1.** Efectuând calculele indicate, obținem că numărul $a=\sqrt{4\frac{37}{81}}+\sqrt{2\frac{1}{144}}-\sqrt{4\frac{25}{36}}$ are valoarea ....

(0,5p) **2.** Rezultatul calculului $\sqrt{0,81}-\sqrt{0,25}+\sqrt{0,36}-\sqrt{3,24}+\sqrt{2,25}-\sqrt{0,16}$ este ....

(0,5p) **3.** Valoarea numărului $x=\sqrt{a^2}+\sqrt{(3-2a)^2}-\sqrt{(4-3a)^2}$, pentru $a<0$, este ....

(0,5p) **4.** Valoarea numărului $a=\sqrt{\frac{37}{4,(1)}}+\sqrt{\frac{38}{4,(2)}}+\sqrt{\frac{39}{4,(3)}}+\sqrt{\frac{40}{4,(4)}}+...+\sqrt{\frac{44}{4,(8)}}$ este ....

(0,5p) **5.** Valoarea numărului:

$$a=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(5-3\sqrt{3}\right)^2}-3\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2}$$ este ..... .

(0,5p) **6.** Valoarea numărului:

$$a=\sqrt{\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\frac{11}{28}+...+\frac{259}{1764}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{252}\right)}$$ este ....

II. Încercuiți răspunsul corect. (2 puncte)

(0,5p) **1.** Valoarea numărului $n=\sqrt{54\cdot 0,(6)}+\sqrt{540\cdot 0,0(6)}+\sqrt{5400\cdot 0,00(6)}$ este:

A. 12; B. 15; C. 18; D. 20.

(0,5p) **2.** Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $\sqrt{340}$ este:

A. 15; B. 16; C. 17; D. 18.

(0,5p) **3.** Cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu $\sqrt{725}$ este:

A. 24; B. 25; C. 27; D. 28.

(0,5p) **4.** Valoarea lui x din proporția $\frac{x}{\sqrt{0,07(1)}}=\frac{\sqrt{1,13(7)}}{\sqrt{0,4096}}$ este:

A. $\frac{1}{4}$; B. $\frac{1}{2}$; C. $\frac{4}{9}$; D. $\frac{5}{9}$.

III. Scrieți rezolvările complete. (4 puncte)

(1p) **1.** Arătați că numărul $A=\sqrt{\left(2020-\frac{1010}{\sqrt{1+3+5+7+...+2019}}\right)^{2019}:2019}$ este natural.

(1p) **2.** Determinați cifrele distincte și nenule a, b, pentru care $\sqrt{\overline{2,(a)}+\overline{4,(b)}}$ este număr rațional.

(1p) **3.** a) Arătați că numărul $a = 6 \cdot 3^{2n+4} - 12 \cdot 3^{2n+3} - 9 \cdot 3^{2n+2}$ este pătratul unui număr natural, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că $\sqrt{a}$ este un număr natural impar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(1p) **4.** Determinați cifrele nenule și distincte a, b, c, cu $a < b < c$, pentru care numărul $x = \sqrt{\overline{a,b(c)}+\overline{b,c(a)}+\overline{c,a(b)}}$ este rațional.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

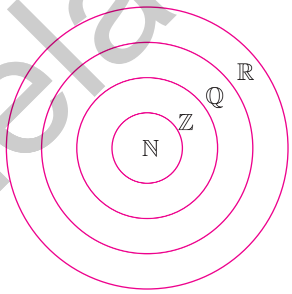
Mulțimea numerelor reale

PE-PP **1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări**

- Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc **numere iraționale**.
- Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și p nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{p}$ este număr irațional.

Exemple: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2018}$.

- **Reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale este mulțimea numerelor reale.
- Se notează cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale.
- Avem șirul de incluziuni: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;
  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



- **Modulul** unui număr real x este: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.
- $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = |-x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

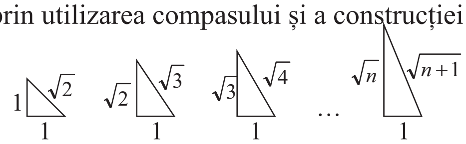
a) Numim **axă** a numerelor reale o dreaptă, cu un punct fixat numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

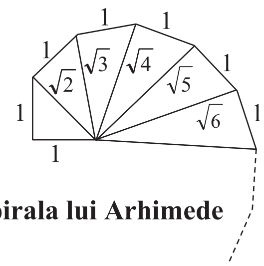
b) Oricărui **număr real** îi corespunde **un singur punct** pe axa numerelor și, reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real.

c) **Exercițiu:** Vom arăta că numărul $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și $(m, n) = 1$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Rezultă că $m^2 = 2n^2$ (1), de unde 2 divide pe m, adică există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = 2l$ (2). Revenind la (1), găsim $2l^2 = n^2$, ceea ce conduce la 2 divide n, adică există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 2k$ (3). Din (2) și (3) obținem că $2 \mid (m, n)$, în contradicție cu ipoteza $(m, n) = 1$. Prin urmare, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

d) Numerele iraționale se reprezintă pe axă în două moduri:
(i) prin aproximare cu numere zecimale;
(ii) prin utilizarea compasului și a construcției următoare:



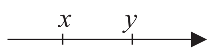


Spirala lui Arhimede

e) Are loc următorul rezultat: Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci:

i) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; ii) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

• Fie x și y două numere reale astfel încât x este la **stânga** lui y pe axa numerelor. Spunem că x este **mai mic** decât y și scriem $x < y$ sau spunem că y este mai mare decât x și scriem $y > x$.



Dacă $x < y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mic sau egal cu y și scriem $x \le y$ sau că y este mai mare sau egal cu x și scriem $y \ge x$.

Dacă $|x| < |y|$, atunci și $\sqrt{|x|} < \sqrt{|y|}$ și reciproc.

• **Partea întreagă** a unui număr real x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Exemple: a) $[3,24] = 3$; b) $[-2,87] = -3$.

• Fie x un număr real. Diferența $x - [x]$ se numește **partea fracționară** a lui x, notată $\{x\}$.

Exemple: a) $\{5,75\} = 5,75 - 5 = 0,75$; b) $\{-5,75\} = -5,75 - (-6) = 6 - 5,75 = 0,25$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-4 \in \mathbb{Z}$; b) $-\dfrac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; d) $0 \notin \mathbb{N}$; e) $-\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$; f) $\sqrt{18} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

g) $-\sqrt{64} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\dfrac{-32}{8} \in \mathbb{Z}$; i) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$; j) $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$; k) $\{-7\} \subset \mathbb{Z}$;

l) $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; n) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{N}$;

o) $\left\{-\dfrac{1}{3}; 0,(6); -\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}; 1,41(6); 1,2(7)\right\} \subset \mathbb{Q}$; p) $\left\{-\dfrac{3}{8}; -2,91(6); 2,3(8); \dfrac{-4\sqrt{25}}{\sqrt{9}}; \dfrac{5\sqrt{36}}{-\sqrt{49}}\right\} \not\subset \mathbb{Q}$.

2. Se consideră numerele: -7; -4; 6; $\dfrac{2}{3}$; $-\sqrt{64}$; $2,08(3)$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$; $-0,8(3)$; 2; 17; $\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$. Precizați care dintre numerele de mai sus sunt:

a) numere naturale; b) numere raționale; c) numere întregi;
d) numere negative; e) numere reale; f) numere iraționale.

3. Fie mulțimea $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \le 125\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare numărul n, numărul corespunzător x să fie:

a) rațional; b) irațional.

4. a) Reprezentați pe axă punctele: $A(\sqrt{4})$; $B\left(\sqrt{\dfrac{49}{4}}\right)$; $C\left(-\sqrt{\dfrac{128}{2}}\right)$; $D(-\sqrt{6,25})$.

b) Fie E, F, G, H simetricele punctelor A, B, C, respectiv D, față de originea axei. Determinați abscisele punctelor E, F, G, H și reprezentați pe axă aceste puncte.

c) Calculați abscisele punctelor M, N, P, Q, mijloacele segmentelor HB, GA, CE, respectiv FD și reprezentați-le pe axă.

d) Determinați lungimile segmentelor $|CG|$, $|EA|$, $|DH|$, $|QM|$, $|MN|$, $|PA|$.

5. Se dau numerele $\sqrt{125}$; $\sqrt{4,25}$; $\sqrt{245,64}$; $\sqrt{1200}$; $\sqrt{256,24}$.

a) Aproximați prin lipsă, la sutime, numerele de mai sus.
b) Aproximați prin adaos, la sutime, numerele de mai sus.

PE-PP 4. Raţionalizarea numitorului unei fracţii

Operația de **raționalizare** a numitorului unei fracții, exprimat printr-un număr irațional de forma $a\sqrt{b}$ cu $a \in \mathbb{Q}^*$ și $b \in \mathbb{Q}_+^*$, este operația în urma căreia, prin **amplificarea** fracției cu un factor, numitorul obținut se transformă într-un număr rațional.

Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+^*$

În acest caz procedăm după regula: $\frac{^{\sqrt{b})}c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$, $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+^*$.

Exemple: (i) $\frac{^{\sqrt{3})}21}{\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}$; (ii) $-\frac{18}{\sqrt{27}} = -\frac{18}{3\sqrt{3}} = -\frac{^{\sqrt{3})}6}{\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3}$.

Observație: Există numitori ai unor fracții și de forma: $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$, $a, c \in \mathbb{Q}^*$, $b, d \in \mathbb{Q}_+^*$, iar raționalizarea se poate face folosind formula: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, numitorul devenind un număr rațional.

Exemplu: $\frac{15}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{15\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{32-27} = \frac{15\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{5} = 3\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Raționalizați numitorii:

a) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; $-\frac{9}{3\sqrt{3}}$; $\frac{16}{2\sqrt{2}}$; $\frac{42}{2\sqrt{7}}$; $\frac{18}{2\sqrt{3}}$; $\frac{12}{3\sqrt{2}}$; $\frac{36}{3\sqrt{6}}$; $\frac{21}{\sqrt{7}}$;

b) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; $-\frac{24}{2\sqrt{6}}$; $\frac{21}{\sqrt{3}}$; $\frac{10}{\sqrt{5}}$; $-\frac{20}{2\sqrt{5}}$; $-\frac{30}{2\sqrt{5}}$; $\frac{35}{\sqrt{5}}$; $\frac{30}{\sqrt{50}}$;

c) $\frac{14}{\sqrt{2}}$; $-\frac{15}{\sqrt{5}}$; $-\frac{24}{\sqrt{8}}$; $\frac{16}{\sqrt{32}}$; $-\frac{36}{\sqrt{27}}$; $\frac{24}{\sqrt{12}}$; $-\frac{45}{\sqrt{75}}$; $\frac{\sqrt{63}}{3\sqrt{7}}$;

d) $\frac{18}{3\sqrt{2}}$; $-\frac{48}{\sqrt{56}}$; $\frac{\sqrt{72}}{8\sqrt{6}}$; $-\frac{60}{\sqrt{75}}$; $-\frac{64}{\sqrt{48}}$; $-\frac{56}{\sqrt{84}}$; $\frac{48}{3\sqrt{12}}$; $-\frac{45}{\sqrt{60}}$;

e) $\sqrt{7\frac{1}{5}}$; $\sqrt{8\frac{4}{7}}$; $\sqrt{5\frac{1}{3}}$; $\sqrt{4\frac{1}{6}}$; $\sqrt{3\frac{1}{5}}$; $\sqrt{16\frac{2}{3}}$; $\sqrt{9\frac{3}{5}}$; $\sqrt{9\frac{3}{8}}$;

f) $\sqrt{8\frac{1}{3}}$; $\sqrt{8\frac{1}{6}}$; $\sqrt{13\frac{1}{2}}$; $\sqrt{10\frac{4}{5}}$; $\sqrt{10\frac{2}{3}}$; $\sqrt{6\frac{6}{7}}$; $\sqrt{14\frac{2}{5}}$; $\sqrt{25\frac{3}{5}}$;

g) $\frac{12}{2\sqrt{3}}$; $\frac{27}{3\sqrt{3}}$; $\frac{45}{3\sqrt{5}}$; $\frac{72}{6\sqrt{2}}$; $\frac{48}{6\sqrt{6}}$; $\frac{54}{3\sqrt{6}}$; $\frac{28}{2\sqrt{7}}$; $\frac{42}{6\sqrt{7}}$.

PE-PP

8. Ecuaţii de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$

• A **rezolva** o ecuație de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, în mulțimea $P \subseteq \mathbb{R}$, înseamnă a determina toate valorile $x_0 \in P$ pentru care propoziția $x_0^2 = a$ este adevărată.

• **Valorile** găsite, dacă există, se numesc **soluții** ale ecuației, iar mulțimea lor, notată de obicei cu S, se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației. Dacă mulțimea P nu este precizată, se consideră $P = \mathbb{R}$.

• **Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}$**, necesită analiza a trei cazuri:

1. Dacă $a < 0$, atunci $S = \varnothing$, deoarece $x^2 \geq 0 > a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Dacă $a = 0$, atunci ecuația devine $x^2 = 0$, având soluția unică $x = 0$. Deci, $S = \{0\}$.
3. Dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ se poate scrie sub forma $x^2 - a = 0$, adică $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$, având soluțiile: $x_1 = -\sqrt{a}$ și $x_2 = \sqrt{a}$, adică $S = \left\{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\right\}$. Sau: $x^2 = a$, $a > 0$, se mai poate scrie $|x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\right\}$.

Exerciții rezolvate:

1. Ecuația $x^2 = 1-\sqrt{4}$ nu are soluții, deoarece $1-\sqrt{4} < 0$, deci $S = \varnothing$.

2. Ecuația $7x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1)$ este echivalentă cu $7x^2 - 5 = 5x^2 - 5$, de unde rezultă că $2x^2 = 0$, adică $x^2 = 0$, deci $S = \{0\}$.

3. Ecuația $5x^2 - 45 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 9$, deci $S = \{-3, 3\}$. Această ecuație se poate rezolva și prin altă metodă: $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, de unde se obține $x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = 3$ sau $x = -3$, de unde $S = \{-3, 3\}$.

4. $x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$, de unde rezultă că $x + 3 = 4$ sau $x + 3 = -4$ și se obțin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$, deci $S = \{-7, 1\}$. Se poate rezolva și altfel: $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $x + 7 = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$.

5. $9x^2 = 27 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow 9x^2 = 18 + 18\sqrt{2} + 9 \Leftrightarrow 9x^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3 + 3^2 \Leftrightarrow 9x^2 = \left(3\sqrt{2}+3\right)^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 9\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2}+1$, adică $x = \sqrt{2}+1$ sau $x = -\sqrt{2}-1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}+1$ și $x_2 = -\sqrt{2}-1$. $S = \left\{-\sqrt{2}-1;\ \sqrt{2}+1\right\}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Precizați care dintre ecuațiile de mai jos admit pe $x = -2$ ca soluție:

a) $x^2 = 4$; b) $3x^2 = 18$; c) $(x - 3)^2 = 25$; d) $2x^2 - 3 = 5$;
e) $(2x + 1)^2 = 27$; f) $(2x - 3)^2 = 49$; g) $x^3 - 8 = -3$; h) $2x^2 - 9 = -1$.

2. A. Verificați dacă -3 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 9$; b) $7x^2 - 2 = 61$; c) $(x - 1)^2 = 4$; d) $(2x + 1)^2 = 49$.

B. Verificați dacă -2 este soluție a următoarelor ecuații:

a) $x^2 = 4$; b) $5x^2 - 3 = 17$; c) $(x + 1)^2 = 9$; d) $(2x - 1)^2 = 25$.

b) $x^2 = \frac{4}{9}$; $x^2 = \frac{18}{25}$; $x^2 = \frac{16}{25}$; $x^2 = \frac{8}{9}$; $x^2 = \frac{72}{49}$;

c) $x^2 = 1\frac{7}{9}$; $x^2 = 1\frac{11}{16}$; $x^2 = 2\frac{7}{9}$; $x^2 = 4\frac{11}{16}$; $x^2 = 13\frac{4}{9}$;

d) $(x-2)^2 = 324$; $(x+1)^2 = 256$; $(x+3)^2 = 121$; $(x-4)^2 = 72$;

e) $x^2 = \sqrt{1296}$; $x^2 = \sqrt{625}$; $x^2 = \sqrt{2401}$; $x^2 = \sqrt{4096}$;

f) $x^2 = \sqrt{15^2 + 20^2}$; $x^2 = \sqrt{20^2 - 12^2}$; $x^2 = \sqrt{45^2 - 27^2}$.

13. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{25x^2}{3} = 0,(6)$; b) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{75} = 0$; c) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$;

d) $\sqrt{5}x^2 - \sqrt{245} = 0$; e) $16x^2 = \sqrt{441}$; f) $25x^2 - \sqrt{729} = 0$.

PE Aplicare și exersare **

14. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos:

a) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{243} = 0$; b) $\sqrt{6}x^2 = \sqrt{96}$; c) $\sqrt{2}x^2 = \sqrt{162}$; d) $2x(x-2) = 2(9-2x)$;

e) $x(x+2) = 2(x+8)$; f) $x(x-4) = 4(4-x)$; g) $x(x-1) = 4-x$; h) $2(x^2-48) = x^2 - 24$;

i) $2x^2 - 15 = x^2 + 21$; j) $x^2 + 4^2 = 5^2$; k) $13^2 - x^2 = 5^2$.

15. Determinați soluțiile următoarelor ecuații:

a) $\frac{x^2+4x}{8} = \frac{2x+8}{4}$; b) $\frac{x-2}{3} = \frac{27}{x-2}$; c) $\frac{x-\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{x-\sqrt{3}}$;

d) $\frac{x^2+4x-3}{4} = \frac{x^2+5x+3}{5}$; e) $\frac{x-2\sqrt{2}}{8} = \frac{4}{x-2\sqrt{2}}$; f) $\frac{x}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2x}$.

16. Rezolvați ecuațiile:

a) $(2x-5)^2 = 9$; b) $(2x-3)^2 = 25$; c) $(2x+7)^2 = 81$; d) $(2x-1)^2 = 49$;

e) $3(2x+5)^2 = 27$; f) $3(2x-7)^2 = 75$; g) $4(2x+1)^2 = 36$; h) $2(2x+3)^2 = 162$;

i) $3(2x-1)^2 = 147$; j) $2(2x+3)^2 = 98$.

PE Aprofundare și performanță ***

17. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a) $3(x+3)^2 - 38 = 109$; b) $4(x-4)^2 + 13 = 157$; c) $6(x-2)^2 - 29 = 25$;

d) $5(x+4)^2 + 22 = 342$; e) $2(2x-1)^2 + 21 = 71$; f) $3(2x-7)^2 - 32 = 43$;

g) $4(2x+3)^2 - 63 = 133$; h) $2(2x-5)^2 + 29 = 191$.

18. Rezolvați ecuațiile:

a) $(x+\sqrt{2})^2 = 8$; b) $(x-\sqrt{3})^2 = 27$; c) $(x+2\sqrt{2})^2 = 32$; d) $(x-3\sqrt{3})^2 = 48$;

e) $(x-2\sqrt{2})^2 = 50$; f) $(x+3\sqrt{3})^2 = 75$; g) $(x+4\sqrt{2})^2 = 72$; h) $(x-4\sqrt{3})^2 = 27$;

i) $(x-4\sqrt{2})^2 = 98$; j) $(x+5\sqrt{2})^2 = 18$.

19. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a) $(2x+\sqrt{2})^2 = 162$; b) $(2x-5\sqrt{3})^2 = 27$; c) $(2x+3\sqrt{3})^2 = 147$;

TESTUL 1

• *Timp de lucru: 60 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.*

Subiectul I (*30 puncte*)

(5p) **1.** Valorile reale ale lui x pentru care $3x^2 + 2 = 50$ sunt:

a) $\{-4; 4\}$; b) $\{-3; 3\}$; c) $\{-2; 2\}$; d) $\{3; 4\}$.

(5p) **2.** Dacă $\frac{3x^2}{64} = \frac{27}{4}$, atunci valorile reale ale lui x sunt:

a) $\{-12; 12\}$; b) $\{-6; 6\}$; c) $\{-4; 4\}$; d) $\{-3; 3\}$.

(5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x + 5)^2 = 121$ este:

a) $\{-8; 2\}$; b) $\{-8; 3\}$; c) $\{-4; 3\}$; d) $\{-4; 2\}$.

(5p) **4.** Valorile reale ale lui x pentru care $x^2 = (2-\sqrt{5})^2$ sunt:

a) $\{-\sqrt{5};-5\}$; b) $\{-\sqrt{2},-2\}$; c) $\{\sqrt{2}-3; 3-\sqrt{2}\}$; d) $\{2-\sqrt{5};\sqrt{5}-2\}$.

(5p) **5.** Valorile reale ale lui x pentru care $\frac{1}{16}x^2 = 0,25$ sunt:

a) $\{-5; 5\}$; b) $\{-4; 4\}$; c) $\{-3; 3\}$; d) $\{-2; 2\}$.

(5p) **6.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x-\sqrt{3})^2 = 27$ este:

a) $\{-3\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; b) $\{-2\sqrt{3},\sqrt{3}\}$; c) $\{-\sqrt{3};-2\sqrt{3}\}$; d) $\{-\sqrt{3};2\sqrt{3}\}$.

Subiectul al II-lea (*20 puncte*)

(5p) **1.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\frac{5x-10}{9} = \frac{20}{x-2}$ este:

a) $\{-6; -4\}$; b) $\{-6; 4\}$; c) $\{-4; 8\}$; d) $\{4; 6\}$.

(5p) **2.** Mulțimea soluțiilor ecuației $3(x - 2)^2 - 5 = 43$ este:

a) $\{-6; -2\}$; b) $\{-6; 2\}$; c) $\{-2; 6\}$; d) $\{2; 6\}$.

(5p) **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $3(2x + 3)^2 - 16 = 59$ este:

a) $\{-4; -3\}$; b) $\{-4; -1\}$; c) $\{-4; 1\}$; d) $\{3; 4\}$.

(5p) **4.** Mulțimea soluțiilor ecuației $(2x-\sqrt{2})^2 = 18$ este:

a) $\{-\sqrt{2};-2\sqrt{2}\}$; b) $\{\sqrt{2},-2\sqrt{2}\}$; c) $\{-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$; d) $\{\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$.

Subiectul al III-lea (*40 puncte*)

(20p) **1.** Rezolvați ecuația $3(2x+3\sqrt{3})^2 - 79 = 146$.

(20p) **2.** Rezolvați ecuația $12(x + 1)^2 = (6+2\sqrt{3})^2$.

Probleme pentru performanță școlară și pregătirea olimpiadelor

1. a) Dacă a și b sunt numere raționale cu proprietatea că $a\sqrt{3}-b\sqrt{5}=0$, demonstrați că $a = b = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(x; y)$ care verifică egalitatea:

$$\sqrt{3(x+1)^2}-2\sqrt{3}=|y+1|\cdot\sqrt{5}-\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|.$$

2. Fie numărul $x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^4}+...+\sqrt{2^{2018}}+\sqrt{2^{2019}}$ și $y = 2^{1010}-\sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\dfrac{x}{y}$.

3. Numerele întregi a și b verifică relația $3a + 4b = 100$. Determinați cea mai mică valoare posibilă pe care o poate lua numărul $|a - b|$.

4. Numerele naturale nenule a, b, c verifică relația $\dfrac{2a}{3b+4c}=\dfrac{3b}{4c+2a}=\dfrac{4c}{2a+3b}$. Determinați valorile lui a, b, c știind că $7a - 6b - 5c = 2019$.

5. Se consideră numerele $x=\sqrt{6-\sqrt{35}}$ și $y=\sqrt{6+\sqrt{35}}$. Calculați

$$(x-y)^2 \text{ și } \left(x-y+\sqrt{10}\right)^{2020}.$$

6. Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot x-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot x\right\}$.

7. Determinați numerele raționale a și b pentru care $\dfrac{a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\dfrac{b}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

9. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 1010$. Arătați că $\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(a+c+d)}+\sqrt{c(a+b+d)}+\sqrt{d(a+b+c)}\leq 2020$.

10. a) Dacă $0 < x < 2y < 5$, arătați că numărul $a=\sqrt{(x-2y)^2}+\sqrt{(x+2y-16)^2}+\sqrt{4x^2}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există x și y numere întregi astfel încât $|x-3y+4|+|x+3y-4|<2$.

11. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z pentru care $x + y + z = 1346$. Arătați că $\sqrt{xy+xz}+\sqrt{xy+yz}+\sqrt{xz+yz}\leq 2019$.

12. Determinați valorile naturale nenule ale lui n pentru care $\dfrac{2\sqrt{n}-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{n}}\in\mathbb{Z}$.

Geometrie

Capitolul I
Patrulatere

PP Competențe specifice

- **C1.** Identificarea patrulaterelor particulare în configuraţii geometrice date
- **C2.** Descrierea patrulaterelor utilizând definiţii şi proprietăţi ale acestora, în configuraţii geometrice date
- **C3.** Utilizarea proprietăţilor patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
- **C4.** Exprimarea în limbaj geometric a noţiunilor legate de patrulatere
- **C5.** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri şi a unor arii
- **C6.** Modelarea unor situaţii date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

PE-PP 1. Patrulatere convexe

Definiţie. Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

Definiţie. Un patrulater se numește **convex** dacă dreapta suport a oricăreia dintre laturi nu separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Definiţie. Un patrulater se numește **concav** dacă există o dreaptă suport a unei laturi care separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 3. Perpendiculara în C pe BC intersectează paralela prin A la BC în punctul D. Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

2. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle A$; $\sphericalangle C = 3 \cdot \sphericalangle A$ și $\sphericalangle D = 2 \cdot \sphericalangle B$.

a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.

b) Arătați că diagonala AC nu poate fi congruentă cu latura AB.

PE-PP 5. Rombul

Definiţie. Rombul este **paralelogramul** cu două **laturi consecutive congruente**.

Dacă un paralelogram este romb, atunci are diagonalele perpendiculare și, reciproc, dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci este romb.

Un paralelogram este **romb** dacă și numai dacă o diagonală a sa este inclusă în bisectoarea unghiului din care aceasta pornește.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Construiți un romb $ABCD$ care are $\sphericalangle BAD = 60°$ și $BD = 6$ cm, cu $BD < AC$.

2. Într-un romb $ABCD$, $\sphericalangle BAD = 60°$ și $BD = 12$ cm. Aflați perimetrul rombului.

3. În rombul $MNPQ$, $\sphericalangle NMP = 30°$, $MP \cap NQ = \{O\}$ și $NO = 6$ cm, cu $NQ < MP$. Aflați perimetrul rombului.

4. În dreptunghi cu dimensiunile egale cu 12 cm și 8 cm are perimetrul egal cu perimetrul unui romb. Calculați lungimea laturii rombului.

5. Rombul $ABCD$ are măsura unghiului $\sphericalangle ABC = 120°$ și lungimea diagonalei $BD = 8$ cm. Calculați perimetrul rombului.

6. Un triunghi echilateral cu latura egală cu 16 cm are perimetrul egal cu perimetrul unui romb. Calculați latura rombului.

7. Triunghiurile ADC și ABC sunt echilaterale. Stabiliți natura patrulaterului convex $ADCB$.

8. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB \equiv AC$ și semidreapta AD bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$. Dacă E este simetricul lui A față de D, arătați că $ABEC$ este romb.

9. Perimetrul unui romb este egal cu 50 cm, iar lungimea diagonalei mici este egală cu 12,5 cm. Determinați măsurile unghiurilor rombului.

10. Un romb are un unghi cu măsura egală cu 120°, iar lungimea diagonalei mici egală cu 18 cm. Calculați perimetrul rombului.

PE Aplicare și exersare **

11. Arătați că mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.

12. În triunghiul ABC ($AB < AC$), BD bisectoarea unghiului ABC, $D \in AC$, se duce $AM \perp BD$, $M \in BD$, $AM \cap BC = \{N\}$. Prin punctul N se duce o paralelă la latura AB care intersectează bisectoarea BD în P. Arătați că $ABNP$ este romb.

13. În triunghiul MNP, semidreapta NQ este bisectoarea unghiului MNP, $Q \in MP$. Prin Q se duc $QD \parallel NP$, $D \in MN$, și $DE \perp NQ$, $E \in NQ$. Știind că $DE \cap NP = \{F\}$, arătați că $DNFQ$ este romb.

14. Fie $ABCD$ un romb de centru O. Știind că E este centrul de greutate al triunghiului ABD și F centrul de greutate al triunghiului BDC, stabiliți natura patrulaterului $DEBF$.

15. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$ și $BC = 10,4$ cm. Știind că D este simetricul lui B față de A și E este simetricul lui C față de A, arătați că $BCDE$ este romb și calculați perimetrul său.

16. În paralelogramul $ABCD$ cu $BD \perp AD$ se notează cu M și N mijloacele laturilor AB și, respectiv, DC. Arătați că $BMDN$ este romb.

PE-PP

10. Aria triunghiului şi aria patrulaterului

• Aria unui **triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h: $\mathcal{A} = \dfrac{a \cdot h}{2}$.

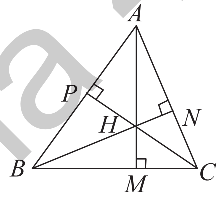
• Dacă în triunghiul ABC se notează $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$, atunci aria triunghiului este dată de **formula lui Heron**:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (semiperimetrul triunghiului).}$$

Proprietatea medianei

Orice mediană împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (au ariile egale).

Observaţii:



- **Aria triunghiului** se calculează cu una dintre formulele:

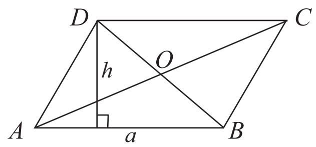
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{AC \cdot BN}{2} = \frac{AB \cdot CP}{2}.$$

(Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură aleasă.)

- Dacă triunghiul este dreptunghic, $\sphericalangle BAC = 90°$, putem folosi formula:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}\text{, unde } AB \text{ și } AC \text{ sunt catetele triunghiului.}$$

- Dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, atunci $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AD \cdot BC}{2}$, de unde, din cele două formule adevărate pentru triunghiul dreptunghic, rezultă că $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$.



• Aria unui **paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi a și înălțimea corespunzătoare ei h.

$$\mathcal{A} = a \cdot h$$

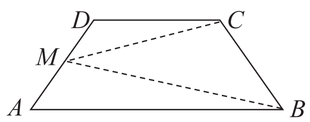
$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{AOD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB}.$$

• Aria unui **dreptunghi** este egală cu produsul dintre lungimea L și lățimea l ale sale: $\mathcal{A} = L \cdot l$.

• Aria unui **romb** este egală cu semiprodusul dintre lungimile diagonalelor sale: $\mathcal{A} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

• Aria unui **pătrat** este egală cu pătratul lungimii laturii sale l: $\mathcal{A} = l^2$.

• Aria unui **trapez** este egală cu semiprodusul dintre suma lungimilor bazelor B, b și lungimea înălțimii h a trapezului: $\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$.



Observaţie: Dacă $ABCD$ este trapez, $AB \parallel CD$, $AM \equiv DM$, $M \in AD$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta MBC} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$.

Definiţie. Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct al uneia la cealaltă.

Definiţie. Înălțimea unui trapez este distanța dintre dreptele ce conțin bazele.

Definiţie. Două suprafețe care au ariile egale se numesc *echivalente*.

●●● activități de învățare ●●●

PE Înțelegere *

1. Calculați:

a) aria unui triunghi cu lungimea bazei egală cu 60 cm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 3,5 dm;

b) aria unui paralelogram cu lungimea unei laturi egală cu 180 mm și lungimea înălțimii corespunzătoare ei egală cu 6 cm;

c) aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor 24 cm și 1,5 dm;

d) aria unui pătrat cu latura de 0,025 m;

e) aria unui romb cu lungimile diagonalelor egale cu 18 cm și 24 cm.

2. Calculați:

a) aria unui romb cu latura de 30 cm și înălțimea de 28,8 cm;

b) aria unui trapez cu înălțimea de 15 cm și lungimea liniei mijlocii egală cu 18 cm;

c) aria unui trapez dreptunghic având lungimile bazelor egale cu 16 cm și 25 cm, iar lungimile laturilor neparalele egale cu 12 cm și, respectiv, 15 cm;

d) aria patrulaterului $ABCD$, cu $AC = 28$ cm, $BD = 35$ cm și $AC \perp BD$.

3. În triunghiul oarecare ABC se duc $AM \perp BC$, $M \in BC$, și $BN \perp AC$, $N \in AC$.

a) Dacă $AC = 18$ cm, $BN = 12$ cm, $AM = 9$ cm, calculați BC și $\mathcal{A}_{ABC}$.

b) Dacă $AC = 15$ cm, $BN = 12$ cm, $BC = 20$ cm, calculați AM și $\mathcal{A}_{ABC}$.

c) Dacă $AM = 6$ cm, $AC = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 72$ cm^2, calculați BC și BN.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, se duce $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 7,2$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC.

b) Dacă $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $AD = 9,6$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și BC.

c) Dacă $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $AD = 12$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$ și AB.

d) Dacă $AD = 14,4$ cm, $AB = 18$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 216$ cm^2, calculați AC și BC.

e) Dacă $AC = 24$ cm, $BC = 40$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 384$ cm^2, calculați AB și AD.

5. În paralelogramul $ABCD$ se notează $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{A}_{AOB} = 216$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

6. Calculați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu lungimea ipotenuzei de 20 cm.

7. Fie $ABCD$ un dreptunghi.

a) Dacă $AB = 15,6$ cm și $BC = 10$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

b) Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 432,5$ cm^2, $AB = 17,3$ cm, calculați BC.

c) Dacă $\mathcal{A}_{ABCD} = 225$ cm^2, $AB = 12,5$ cm, calculați BC.

d) Dacă $AB = 24$ cm și $BC = 15$ cm, calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$.

e) Dacă $BC = 7,5$ cm și $\mathcal{A}_{ABCD} = 93,75$ cm^2, calculați AB.

8. În triunghiul ABC, AM este mediană, $M \in BC$. Știind că $\mathcal{A}_{ABC} = 168$ cm^2 și $AB = 21$ cm, calculați:

a) distanța de la punctul C la dreapta AB; b) aria triunghiului ACM.

9. Calculați aria unui romb cu diagonala mică de 12 cm și diagonala mare egală cu triplul diagonalei mici.

10. Calculați aria unui dreptunghi în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) perimetrul dreptunghiului este de 150 cm și lățimea este un sfert din lungime;

b) perimetrul dreptunghiului este de 126 cm și lățimea are 40% din lungime.

Capitolul II
Cercul

PP Competențe specifice

C1. Identificarea elementelor cercului şi/sau poligoanelor regulate în configuraţii geometrice date

C2. Descrierea proprietăţilor cercului şi ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

C3. Utilizarea proprietăţilor cercului în rezolvarea de probleme

C4. Exprimarea proprietăţilor cercului şi ale poligoanelor în limbaj matematic

C5. Interpretarea unor proprietăţi ale cercului şi ale poligoanelor regulate folosind reprezentări

C6. Modelarea matematică a unor situaţii practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

Definiţie. Dacă se dă un punct fix O în plan și un număr pozitiv r și considerăm toate punctele din plan care se găsesc la distanța r de punctul O, mulțimea acestor puncte o vom numi **cerc** de centru O și rază r și o vom nota $\mathscr{C}(O, r)$.

Definiția cercului o mai putem formula și astfel:

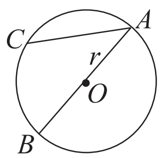
- Se numește **cerc** locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru.

Notăm cercul de centru O și rază r astfel: $\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} | \ OM = r\}$.

- În anumite situații, prin **rază** vom înțelege și segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului. Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă**. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**.
- Lungimea oricărui diametru este $2r$. Două puncte de pe cerc care sunt extremitățile unui diametru se numesc **puncte diametral opuse**.
- Două cercuri sunt **congruente** dacă și numai dacă au razele egale. Scriem:

$\mathscr{C}(O_1, r_1) \equiv \mathscr{C}(O_2, r_2)$ dacă și numai dacă $r_1 = r_2$.

În figura alăturată, segmentul AC este coardă, iar AB este diametru. Segmentele OA, OB și OC sunt raze. Avem $OA = OB = OC = r$ și $AB = 2r$.



Interior. Exterior. Disc

- Mulțimea $\text{Int}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} | \ OM < r\}$ se numește **interiorul cercului**.
- Mulțimea $\text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} | \ OM > r\}$ se numește **exteriorul cercului**.
- Mulțimea $\mathscr{D}(O, r) = \mathscr{C}(O, r) \cup \text{Int}\,\mathscr{C}(O, r) = \{M \in \mathscr{P} | \ OM \leq r\}$ se numește **disc** de centru O și rază r.

PE-PP APLICAŢIE 2. UNGHIURI ÎNSCRISE ÎNTR-UN SEMICERC

Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte.

Generalizare. Toate unghiurile care au vârful pe un cerc şi ale căror laturi conţin capetele arcului sunt congruente.

Teoremă. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două şi numai două tangente la acest cerc.

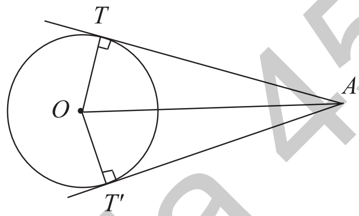
Observaţie: Fie A un punct exterior unui cerc de centru O, şi T şi T' puncte de contact ale tangentelor din A la cerc. Atunci:

a) $TA \equiv T'A$;

b) AO este bisectoarea unghiului TAT';

c) OA este bisectoarea unghiului TOT';

d) OA este mediatoarea segmentului TT'.



● ● ● activităţi de învăţare ● ● ●

PE Înţelegere *

1. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, $R = 12$ cm, se iau două puncte distincte A şi B. Determinaţi lungimea coardei AB, dacă:

a) $\sphericalangle AOB = 60°$; b) $\sphericalangle AOB = 180°$.

2. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau două puncte distincte A şi B. Determinaţi măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$, dacă:

a) $\sphericalangle AOB = 75°$; b) $\sphericalangle OBA = 50°$; c) $\sphericalangle OAB = 45°$.

3. Măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ reprezintă 40% din măsura cercului $\mathscr{C}(O, R)$. Calculaţi măsura unghiului la centru AOB.

4. Măsura arcului $\overset{\frown}{PQ}$ reprezintă 35% din măsura cercului $\mathscr{C}(O, R)$. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului OPQ.

5. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau două puncte distincte A şi B. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului AOB, dacă măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu:

a) $\overset{\frown}{AB} = 45°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 60°$; c) $\overset{\frown}{AB} = 80°$;

d) $\overset{\frown}{AB} = 90°$; e) $\overset{\frown}{AB} = 120°$; f) $\overset{\frown}{AB} = 150°$.

6. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se iau punctele distincte M, N, P, Q, R, S, în această ordine, astfel încât $MN \parallel PS$ şi $QP \equiv RS$. Demonstraţi că $MR \equiv NQ$.

7. Triunghiul isoscel OMN are vârful O în centrul unui cerc dat, iar baza MN intersectează cercul în punctele A şi B, unde $B \in AN$ şi $A \in MB$. Demonstraţi că $AM \equiv BN$.

8. Triunghiul isoscel OPQ are vârful O în centrul unui cerc dat şi baza PQ. Ştiind că dreapta PQ intersectează cercul în punctele A şi B astfel încât $B \in AQ$ şi $A \in PB$, demonstraţi că $AP \equiv BQ$ şi $AQ \equiv PB$.

9. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, se consideră punctele distincte M şi N, iar punctele P şi Q sunt mijloacele arcelor determinate de ele pe cerc. Arătaţi că PQ este diametrul cercului.

Indicaţii şi răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIŢIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

Algebră

Testul 1. 1. a) $a = -14$; $b = -6$; $n = -8$; b) $x = -9$; $y = -8$; $n = -17$. **2.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{-2\}$. **3.** a) $x \in \{0, 1, 2\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **4.** a) $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **5.** a) $n \in \{-10, -4, -2, 0, 2, 8\}$; b) $n \in \{-10, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 6\}$; c) $n \in \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$; d) $n \in \{-7, -1, 0, 6\}$. **6.** a) $\frac{7}{20}$; b) $-\frac{43}{84}$; c) $-\frac{25}{48}$; d) $\frac{1}{12}$. **7.** $377 = an + 17$, $17 < n$; $517 = bn + 13$, $13 < n$; $803 = cn + 11$, $11 < n \Rightarrow 360 = an$, $504 = bn$, $792 = cn$, $n > 17 \Rightarrow n \mid (360; 504; 792) \Rightarrow n \mid 72 \Rightarrow n \in \{18, 24, 36, 72\}$. **8.** $n = 20a + 14$, $n = 24b + 18$, $n = 28c + 22 \Rightarrow n + 6 = 20(n + 1)$, $n + 6 = 24(b + 1)$, $n + 6 = 28(c + 1) \Rightarrow [20; 24; 28] \mid$ $\mid n + 6 \Rightarrow n = 840k - 6$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $k = 1$ se obține $n = 834$. **9.** a) $12 \mid \overline{a24b}$, $a \neq 0 \Rightarrow 3 \mid \overline{a24b}$, $4 \mid \overline{a24b}$, $(3; 4) = 1$; din $3 \mid \overline{a24b} \Rightarrow 3 \mid a + b + 6 \Rightarrow a + b + 6 = \mathcal{M}_3$; din $4 \mid \overline{a24b} \Rightarrow b \in \{0, 4, 8\}$; $b = 0 \Rightarrow a + 6 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{3, 6, 9\}$; $b = 4 \Rightarrow a + 10 = \mathcal{M}_3 \Rightarrow a \in \{2, 5, 8\}$; $b = 8 \Rightarrow a + 14 = \mathcal{M}_3$ $\Rightarrow a \in \{1, 4, 7\}$; $(a, b) \in \{(3, 0), (6, 0), (9, 0), (2, 4), (5, 4), (8, 4), (1, 8), (4, 8), (7, 8)\}$; b) $(a, b) \in$ $\in \{(4, 0), (2, 2), (9, 4), (2, 6), (5, 8)\}$; c) $(a, b) \in \{(7, 0), (3, 4), (8, 8)\}$. **10.** a) $a = 12x$, $b = 12y$, $(x; y) = 1$, $x < y$, $xy = 42$. Am folosit $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$. $x = 1 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow a = 12$, $b = 504$; $x = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 21 \Rightarrow a = 24$, $b = 252$; $x = 3 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow a = 36$, $b = 168$; b) $a - b = \{120, 240, 480, 1560\}$. **11.** a) Fie $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d = (9n + 17; 12n + 23) \Rightarrow d \mid 9n + 17$ și $d \mid 12n + 23 \Rightarrow d \mid 36n + 68$ și $d \mid 36n + 69 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (9n + 17; 12n + 23) = 1 \Rightarrow$ fracția este ireductibilă; b), c), d) Analog a). **12.** $A = 12^n \cdot 68 = 4 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid A$. **13.** $A = 4^n \cdot 42 = 2 \cdot 21 \cdot 4^n \Rightarrow 21 \mid A$.

Testul 2. 1. a) $a = -12$; $b = -9$; $n = +6$; b) $x = -24$; $y = -18$; $n = -6$. **2.** a) $S = \{5\}$; b) $S = \{-7\}$; c) $S =$ $= \{4\}$; d) $S = \{4\}$. **3.** a) $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2\}$; b) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. **4.** a) $-\frac{13}{20}$; b) $-\frac{7}{18}$; c) $\frac{7}{16}$; d) $\frac{7}{6}$. **5.** a) $n \in \{-9, -5, -3, -2, 0, 1, 3, 7\}$; b) $n \in \{-14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 10\}$; c) $n \in \{-17, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 18\}$; d) $n \in \{-18, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 17\}$. **6.** $n \in$ $\in \{18, 36\}$. **7.** $(a, b) \in \{(12, 360), (24, 180), (36, 120), (60, 72)\}$. **8.** $n = 426$. **9.** a) $(a, b) \in \{(0, 2),$ $(3, 2), (6, 2), (9, 2), (2, 6), (5, 6), (7, 6)\}$; b) $(a, b) \in \{(8, 0), (6, 2), (4, 4), (2, 6), (0, 8), (9, 8)\}$; c) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (5, 4), (1, 8)\}$; d) $(a, b) \in \{(0, 0), (9, 0), (4, 5)\}$. **10.** a) $x = 54$, $y = 72$, $z =$ $= 108$, $t = 36$; b) $a = 56$, $b = 84$, $c = 126$; c) $a = 24$, $b = 72$, $c = 96$. **11.** a) $A = 16^n \cdot 10 \Rightarrow 10 \mid A$; b) $A = 30^n \cdot 11 \Rightarrow 11 \mid A$; c) $a = 102 \cdot 12^n = 6 \cdot 17 \cdot 12^n \Rightarrow 17 \mid a$.

Testul 3. 1. a) $a = -12$; $b = -6$; $n = 2$; b) $x = -21$; $y = -12$; $n = -9$. **2.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{7\}$; d) $S = \{-4\}$. **3.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **4.** a) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $x \in \{-5, -4, -3, -2\}$; c) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. **5.** a) $A = \{3, 4, 5, 8, 11, 20\}$; $B = \{0, 1, 3, 5, 9, 21\}$; $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 20, 21\}$; $A \cap B = \{3, 5\}$; $A \setminus B = \{4, 8, 11, 20\}$;

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Rădăcina pătrată

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

1.

x	–5	–3	–2	0	±4	±6	9	12
x^2	25	9	4	0	16	36	81	144

2. a) 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; b) 144; 169; 196; 225; 256; 289; c) 324; 361; 400; 441; 484; 529; 576; 625; 676; 729; 784; 841; 900; 961. **3.** a) ±5; b) ±8; c) ±11; d) ±27; e) ±36. **4.** a) $2^2 \cdot 3^2$; b) 2^6; c) 1 nu este prim; d) 13^2; e) $2^2 \cdot 3^4$; f) 23^2; g) $2^8 \cdot 3^4$; h) $7^2 \cdot 2^6 \cdot 5^2$; i) $2^6 \cdot 5^6$; j) $2^{12} \cdot 5^4$; k) $11^2 \cdot 13^6$. **5.** a) 36; 4; 169; 196; 225; 256; b) 13^2; $(-9)^4$; 3^8; $(-12)^{18}$; $(-28)^6$; c) 5^{8n}; 7^{6n+4}; 15^{n^2+n}; 12^{n^2-n+6}; $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. **6.** a) $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$; b) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **7.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) F; g) F; h) F. **8.** (i) a) 6; b) 40; c) 7; d) 6; e) 16; f) 13; g) 12; h) 8; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \varnothing$; k) $x \in \{1\}$; l) $x \in \{14\}$; (ii) a) ±6; b) ±40; c) ±7; d) ±6; e) ±16; f) ±13; g) ±12; h) ±8; i) $x \in \{1; 5\}$; j) $x \in \{-7; -1\}$; k) $x \in \{-7; 1\}$; l) $x \in \{-4; 14\}$. **9.** a) 2^{101}; b) 3^{125}; c) 5^{180}; d) 3^{50}; e) 6^{100}; f) 8^{1010}. **10.** a) 70^2; b) 113^2; c) 1010^2; d) 1010^2; e) $2^6 \cdot 3^2 \cdot 17^2$; f) 1009^2. **11.** a) 99; b) 105; c) 18; d) 180; e) 15; f) 50; g) 50; h) 88. **12.** a) $x = 9^n$; $\sqrt{x} = 3^n$; b) $x = 25^n$; $\sqrt{x} = 5^n$; c) $x = 16^{n+2}$; $\sqrt{x} = 4^{n+2}$; d) $x = 4^{n+3}$; $\sqrt{x} = 2^{n+3}$. **13.** $x = 36^2 \cdot 12^{2n}$. **14.** $x = 2^{2020} = \left(2^{1010}\right)^2$. **15.** a) $x = 49 \cdot 144 = (7 \cdot 12)^2 = 84^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 84$; b) $x = 49 \cdot 100 = (7 \cdot 10)^2 = 70^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 70$; c) $x = 501^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 501$; d) $x = 1011^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1011$; e) $x = 1203^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1203$. **16.** a) $x = 2 + 15(2^2 + 2^6 + ... + 2^{1998}) \Rightarrow \text{u}(x) = 2 \Rightarrow x \neq$ p.p.; b) $x = 3 + 40(3^2 + 3^6 +... + 3^{1998}) \Rightarrow \text{u}(x) = 3 \Rightarrow x \neq$ p.p. **17.** a) $x = 1010^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1010$; b) $a = 289 \cdot 576 \Rightarrow \sqrt{a} = 408$; c) $n = 361 \Rightarrow \sqrt{n} = 19$; d) $n = 729 = 27^2$; $x^2 = 27^2 \Rightarrow |x| = 27 \Rightarrow x \in \{-27, 27\}$; e) $n = 729 = 27^2 \Rightarrow \sqrt{n} = 27$. **18.** a) $\text{u}(x) \in \{3, 8\}$; b) $\text{u}(x) \in \{3, 8\}$; c) $\text{u}(x) \in \{3, 8\}$; d) $\text{u}(x) = 2$; e) $\text{u}(x) = 8$; f) $\text{u}(x) = 3$; g) $\text{u}(x) = 7$; h) $\text{u}(x) = 3$; i) $x = 8 + 585(8^2 + 8^6 + ... + 8^{2014}) \Rightarrow \text{u}(x) = 8 \Rightarrow x \neq$ p.p.; j) $x = 7 + 400(7^2 + 7^6 + ... + 7^{2018}) \Rightarrow \text{u}(x) = 7 \Rightarrow x \neq$ p.p. **19.** $n = 10x + 8$, $n \in \mathbb{N}$, $(\forall)$ x cifră nenulă. **20.** $A = \sqrt{49 \cdot 25^{2n} \cdot 9^{2n+2}} = 7 \cdot 25^n \cdot 9^{n+1}$. **21.** $a = 625 \cdot 49^n \cdot 24^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 25 \cdot 7^n \cdot 24^n =$ nr. par. **22.** $a = 13^2 \cdot 5^{2n} \cdot 12^{2n} \Rightarrow \sqrt{a} = 13 \cdot 5^n \cdot 12^n =$ nr. par. **23.** a) 14; 23^2; 35; 3^3; 7^2; $|a|$; a^2; a^4; $|a^3|$; b) $2^2 \cdot 3$; $16 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^3 \cdot 3^2 \cdot 18$; $5 \cdot 3^2 \cdot 12$. **24.** a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$; b) $2 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$; d) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; e) $2^2 \cdot 14 \cdot 15$; f) $2 \cdot 7 \cdot 3^2$; g) $2^5 \cdot 5$; h) $2^3 \cdot 3^2$; i) $2^4 \cdot 3 \cdot 5$; j) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$; k) $2^5 \cdot 3^3$; l) $7 \cdot 26$. **25.** a) 23; b) 23^2; c) 23^3; d) 17^4; e) 15; f) 36^2; g) 48; h) 12^2; i) 2^{12}; j) 2^{1009}; k) 3^{1010}; l) 6^{1009}; m) 7^{1010}; n) 5^{1008}. **26.** a) 24; 27; 25; 18; b) 20; 28; 21; 26; c) 40; 36; 42; 45; d) 50; 48; 56; 72. **27.** a) 61; 44; 68; 96; b) 85; 47; 84; 63; c) 46; 59; 62; 54; d) 113; 213; 123; 126. **28.** a) 444; b) 150; c) 289; d) 289. **29.** a) 6^2; b) $3 \cdot 11^2$; c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; d) $2^3 \cdot 14 \cdot 9$; e) 13; f) 13; g) 21; h) 2^4. **30.** a) 2^5; b) 5^2; c) 75; d) 15; e) 17; f) 25, g) 50; h) 10. **31.** a) 15; b) 20; c) 25; d) 18; e) 17; f) 108; g) 70. **32.** a) 18; b) 63; c) 36; d) 632; e) 42; f) 31. **33.** a) 80; b) 535; c) 51; d) 27. **34.** a) 344; b) 257. **35.** a) 1010; b) 2; c) 1010; d) 501; e) 505. **36.** $a = (10 \cdot 40^n)^2$. **37.** 239. **38.** Card $A = 13$, card $B = 39$.

2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ

1. $B = \left\{\frac{4}{9}; \frac{9}{64}; 64; 1; \frac{25}{9}; \frac{16}{9}; \frac{49}{36}; \frac{25}{144}; \frac{49}{144}\right\}$.

2. a)

a	–0,8	$-\frac{5}{8}$	-4^2	-1^3	–0,25	0,08(3)	1,41(6)	1,2(6)	$\frac{5}{4}$	3	4,25	2,3(8)
a^2	0,64	$\frac{25}{64}$	256	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{289}{144}$	$\frac{361}{225}$	$\frac{25}{16}$	9	$\frac{289}{16}$	$\frac{1849}{324}$

$= 3x^2$; $a = \dfrac{2x+1}{3-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 - x \mid 2x + 1 \Rightarrow x \in \{2, 4, 10\} \Rightarrow n \in \{12, 48, 300\}$. **17.** a) $x = \dfrac{\sqrt{3}\left(3^{1010}-1\right)}{\sqrt{3}-1}$;
b) $y = \dfrac{3\left(3^{1010}-1\right)\left(3^{1010}+1\right)}{2}$; $z = \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{3\left(3^{1010}-1\right)\left(3^{1010}+1\right)}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\left(3^{1010}-1\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow z =$
$= 3^{1010} + 1 - 1 = 3^{1010} = \left(3^{505}\right)^2$. **18.** $a \in \{-10; 4\}$; $b \in \{-3; -1\}$. **19.** $\overline{ab} = 81$. **20.** a) $E^2(x) = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow |E(x)| = 8 \Rightarrow |x + 3| = 8 \Rightarrow x \in \{-11; 5\}$; b) $a \in \{-2; -1\}$. **21.** Egalitatea din enunț se poate scrie:
$\left(a-1-2\sqrt{a-1}+1\right)+\left(b-a-2\sqrt{b-a}+1\right)+\left(c-b-2\sqrt{c-b}+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{b-a}-1\right)^2+$
$+\left(\sqrt{c-b}-1\right)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$; $b = 3$; $c = 4$. **22.** $x = 7$; $y = 4$. **23.** $2\sqrt{a-4} = \sqrt{4(a-4)} \le \dfrac{4+a-4}{2} = \dfrac{a}{2}$;
$3\sqrt{b-9} = \sqrt{9(b-9)} \le \dfrac{9+b-9}{2} = \dfrac{b}{2}$; $4\sqrt{c-16} = \sqrt{16(c-16)} \le \dfrac{16+c-16}{2} = \dfrac{c}{2}$. Deci $2\sqrt{a-4} +$
$+ 3\sqrt{b-9} + 4\sqrt{c-16} \le \dfrac{a+b+c}{2}$. Egalitatea are loc pentru $a = 8$; $b = 18$; $c = 32$. **24.** $a + 2 \ge 2\sqrt{2a}$;
$2b + 3 \ge 2\sqrt{6b}$; $3c + 4 \ge 2\sqrt{12c} \Rightarrow (a + 2)(2b + 3)(3c + 4) \ge 96\sqrt{abc} = 96\cdot\dfrac{1}{6} = 16$. Inegalitatea este strictă, deoarece egalitățile $a = 2$, $2b = 3$, $3c = 4$ și $36abc = 1$ nu sunt îndeplinite simultan. *Observație*: Poate fi înlocuită ipoteza $36abc = 1$ cu $abc = 4$ și concluzia cu $(a + 2)(2b + 3)(3c + 4) \ge$
≥ 192. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow a = 2$, $2b = 3 \Rightarrow b = \dfrac{3}{2}$, $3c = 4 \Rightarrow c = \dfrac{4}{3}$. **25.** Se notează $|x_1 - x_2| = 2|x_2 -$
$- x_3| = 3|x_3 - x_4| = ... = 2019|x_{2019} - x_{2020}| = 2020|x_{2020} - x_1| = k$, de unde rezultă că $x_1 - x_2 = \pm k$;
$x_2 - x_3 = \pm\dfrac{k}{2}$; $x_3 - x_4 = \pm\dfrac{k}{3}$; ... ; $x_{2019} - x_{2020} = \pm\dfrac{k}{2019}$; $x_{2020} - x_1 = \pm\dfrac{k}{2020}$. Prin însumare se obține
$k\left(\pm1\pm\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{3}\pm...\pm\dfrac{1}{2019}\pm\dfrac{1}{2020}\right) = 0 \Rightarrow k = 0$. Deci numerele sunt egale. **26.** $a = 2\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$;
$c = 3$; $P = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$. **27.** $a(a - 1) + |b + 2| + (c^2 - 4)^2 \ge 0$, deoarece $a(a - 1) \ge 0$, $|b + 2| \ge 0$;
$(c^2 - 4)^2 \ge 0$. Deci $a = 1$; $b = -2$; $c = 2$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. PATRULATERE

1. Patrulatere convexe

1. $\sphericalangle A = 105°$; $\sphericalangle B = 75°$; $\sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D = 90°$. **2.** a) $\sphericalangle A = 36°$; $\sphericalangle B = 72°$; $\sphericalangle C = 108°$; $\sphericalangle D = 144°$; b) Se folosește metoda reducerii la absurd și se ajunge la $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 36°$ (fals). **3.** $\sphericalangle A = 60°$; $\sphericalangle B = 80°$; $\sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle D = 120°$. **4.** Notăm cu a măsura celor trei unghiuri congruente (în grade) și cu b măsura celuilalt unghi; atunci $3a + b = 360°$; *Cazul I.* $a + b = 170°$, de unde se obține $a = 95°$ și $b = 75°$. *Cazul II.* Dacă $2a = 170°$, atunci $a = 85°$ și $b = 105°$. **5.** $\sphericalangle A = 115°$; $\sphericalangle B = 85°$; $\sphericalangle C = 95°$; $\sphericalangle D = 65°$. **6.** $\sphericalangle A = 45°$; $\sphericalangle B = 75°$; $\sphericalangle C = 105°$; $\sphericalangle D = 135°$. **7.** $\sphericalangle A = 36°$; $\sphericalangle B = 72°$; $\sphericalangle C = 108°$; $\sphericalangle D = 144°$. **8.** $\sphericalangle A = 112°30'$; $\sphericalangle B = 135°$; $\sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D = 22°30'$. **9.** $\sphericalangle A = 45°$; $\sphericalangle B = 60°$; $\sphericalangle C = 120°$; $\sphericalangle D = 135°$. **10.** $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72°$; $\sphericalangle D = 126°$ și $\sphericalangle E = 90°$. **11.** $\sphericalangle A = \sphericalangle N = 90°$; $\sphericalangle M = 140°$. **12.** $\sphericalangle B = 104°$; $\sphericalangle C = 72°$; $\sphericalangle D = 144°$. **13.** $\sphericalangle A = 80°$; $\sphericalangle B = 160°$; $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60°$. **14.** $\sphericalangle A = 60°$; $\sphericalangle B = 75°$; $\sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D = 135°$. **15.** $90°$. **16.** $\sphericalangle A = 90°$; $\sphericalangle B = 90°$; $\sphericalangle C = 60°$; $\sphericalangle D = 120°$. **17.** $\sphericalangle A = 112°30'$; $\sphericalangle B = 135°$; $\sphericalangle C = 90°$; $\sphericalangle D = 22°30'$. **18.** $\sphericalangle AMC = 90°$; $\sphericalangle MAB = 140°$; $\sphericalangle B = 40°$; $\sphericalangle BCM = 90°$. **19.** $\sphericalangle A = 75°$;

GF este linie mijlocie $\Rightarrow GF \parallel AC$ și $GF = \dfrac{AC}{2}$. Deci $DE \equiv GF$ (1); b) Din $DE \parallel AC$ și $GF \parallel AC \Rightarrow$ $\Rightarrow DE \parallel GF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow DEFG$ paralelogram (3). H – ortocentru $\Rightarrow BH$ înălțime $\Rightarrow BH \perp AC$. În ΔABH: GD este linie mijlocie $\Rightarrow GD \parallel BH$. Cum $BH \perp AC$ și $AC \parallel DE \Rightarrow BH \perp DE \Rightarrow GD \perp DE \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle GDE = 90°$ (4). Din (3) și (4) $\Rightarrow DEFG$ este dreptunghi. **39.** Fie $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$ astfel încât $AM \equiv MD$ și $BN \equiv CN$. Deci, în triunghiurile dreptunghice ΔAED și ΔBFC, rezultă că $EM = AM =$ $= MD$ și $FN = BN = CN$. De aici rezultă că $EM \parallel AB$ (1) și $FN \parallel CD$ (2). Cum $MN \parallel AB$ (3), atunci din relațiile (1), (2), (3) conform axiomei paralelelor rezultă că dreptele ME și NF coincid, deci punctele M, E, F, N sunt coliniare.

5. Rombul

2. ΔABD echilateral $\Rightarrow AB = AD = BD = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{ABCD} = 48$ cm. **3.** ΔMNO: Conform $T_{30-60-90}$ rezultă $MN = 2NO \Rightarrow NQ = 12$ cm $\Rightarrow \mathcal{P}_{MNPQ} = 48$ cm. **4.** 10 cm. **5.** $\sphericalangle BAD = 60° \Rightarrow$ în ΔABD avem $AB = AD = BD = 8$ cm; $\mathcal{P} = 32$ cm. **6.** 12 cm. **7.** ΔABC echilateral $\Rightarrow AB = BC = AC$; ΔADC echilateral $\Rightarrow AD = DC = AC \Rightarrow AB = BC = CD = AD \Rightarrow ABCD$ romb. **8.** ΔABC isoscel ($AB = AC$) și AD bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow AD$ înălțime și mediană. Cum $AD = DE$ (ipoteză) $\Rightarrow ABCD$ paralelogram, dar $AB = AC \Rightarrow ABEC$ romb. **9.** $ABCD$ romb; $BD < AC$; $\mathcal{P} = 4AB \Rightarrow AB = BD = 12{,}5$ cm $\Rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = 60°$; $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120°$. **10.** $\mathcal{P} = 72$ cm. **11.** Fie rombul $ABCD$ și punctele E, F, G, H mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv AD. Se arată că EF și HG sunt linii mijlocii astfel încât $EF \parallel HG$ și $EF \equiv HG$. Deci $EFHG$ paralelogram. Dar $HG \parallel AC$ și $HE \parallel BD$, rezultă că $HG \perp$ $\perp HE$, deci $EFHG$ dreptunghi. **12.** Se arată că ΔABN isoscel și BM bisectoare, rezultă că $AM] \equiv$ $\equiv MN]$ și din $\Delta AMB \equiv \Delta NMP$ rezultă că $AB \equiv NP$. **13.** Se arată că ΔNDQ isoscel și DE înălțime, atunci $NE \equiv EQ$ și din $\Delta EDQ \equiv \Delta EFN$ rezultă că $DQ \equiv NF$. **14.** $BEDF$ este paralelogram cu diagonalele perpendiculare $\Rightarrow BEDF$ romb. **15.** $BCDE$ este paralelogram cu diagonalele perpendiculare; $\mathcal{P}_{BCDF} = 41{,}6$ cm. **16.** DM este mediană în ΔADB dreptunghic $\Rightarrow DM \equiv NB$. **17.** a) Se arată că rombul este format din două triunghiuri echilaterale, deci rombul are unghiurile de 60° și 120°; b) 30° și 60°. **18.** Perimetrul rombului este de 32 cm. **19.** Se arată că $AEDF$ este paralelogram și că ΔAED este isoscel. **20.** Se arată că $AMND$ și $BCNM$ sunt dreptunghiuri care au diagonalele congruente. **21.** MD și DN linii mijlocii în ΔABC, respectiv, ΔACB. Cum $MD \parallel AC$ și $MD = \dfrac{AC}{2}$, iar $DN \parallel AB$ și $DN =$ $= \dfrac{AB}{2}$, avem $AMDN$ paralelogram. Din $AB \equiv AC$ (ipoteză) avem $DM \equiv DN$, de unde $AMDN$ romb. **22.** Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. Cum MN este linie mijlocie în ΔABC, $MN \parallel$ $\parallel AC$, iar PQ este linie mijlocie în ΔADC, $PQ \parallel AC$, avem $MN \parallel PQ$. În plus, $MN = \dfrac{AC}{2}$. Analog, $MQ \parallel PN$ și $MQ = \dfrac{BD}{2}$. Avem $MNPQ$ paralelogram și cum $AC = BD$, rezultă că $MNPQ$ este romb. **23.** Se arată că patrulaterul $MNPQ$ este romb, deoarece laturile sale sunt linii mijlocii în triunghiurile din care fac parte. Deoarece ΔBOC este echilateral, atunci $AC = BD = 32$ cm și $\mathcal{P}_{MNPQ} = 64$ cm. **24.** Punctele A, D, E sunt coliniare. În ΔAMC dreptunghic, MO este mediană. **25.** a) Se arată că $\sphericalangle AGE =$ $= \sphericalangle AEG = \sphericalangle B + \dfrac{\sphericalangle C}{2}$; b) Se folosește proprietatea punctelor de pe bisectoare. Deci, $EF \equiv AE \equiv AG$ și cum $EF \parallel AG \Rightarrow AEFG$ romb. **26.** Dacă $\sphericalangle A = 60°$ și $AB \equiv AD \Rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\Rightarrow DM \perp AB$. Analog se arată că $BN \perp DC$. **27.** $\Delta BNC \equiv \Delta DNQ \Rightarrow BC \equiv DQ$ și $\Delta AMB \equiv \Delta DMP \Rightarrow AB \equiv DP$. Rezultă că $ACQP$ are diagonalele congruente și se taie în părți congruente, deci este dreptunghi. **28.** $ABCD$ – ortodiagonal ($AC \perp BD$) și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și AD, rezultă că laturile patrulaterului obținut sunt linii mijlocii în triunghiurile din care fac parte și sunt paralele cu diagonalele patrulaterului dat. Deci patrulaterul obținut este dreptunghi. **29.** În ΔABC: EF linie

Cuprins