

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall

Tehnoredactare: Iuliana Ene

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NEGRILĂ, ANTON

Matematică : algebră, geometrie : clasa a VIII-a /

Anton Negrilă, Maria Negrilă. - Ed. a 12-a. - Pitești :

Paralela 45, 2023-

2 vol.

ISBN 978-973-47-3887-8

Partea 1. - 2023. - ISBN 978-973-47-3888-5

I. Negrilă, Maria

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2023

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică

algebră

geometrie

clasa a VIII-a

partea I

ediția a XII-a



mate 2000 – consolidare

Recapitulare și evaluare inițială

PE Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

✿ TESTUL 1 ✿

1. Efectuați calculele:

a) $\sqrt{6} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{8} - \sqrt{27}$;

b) $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{27})$;

c) $\left(\frac{4}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{8}} \right) - \left(\frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $3(x+3) - 5(x+1) = 4(x+4)$;

b) $|2x-3| = 5$;

c) $\frac{4x-3}{3} - \frac{2x+1}{2} = 1\frac{1}{6}$;

d) $\sqrt{(x-2)^2} = \frac{1}{4}$;

e) $(x+3)^2 = 25$.

3. Se consideră numerele $a = 2\sqrt{432} - 3\sqrt{75} - \sqrt{147}$ și $b = 3\sqrt{243} - 3\sqrt{108} - \sqrt{27}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b .

4. Rezolvați sistemele:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$
;

b)
$$\begin{cases} 3(2x + y) - 2(x + 2y - 5) = 20 \\ 5(x - y + 2) = 4(2x - y + 3) - 13 \end{cases}$$

5. Se consideră punctele $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ și $C(3; 7)$.

a) Reprezentați punctele într-un sistem de axe de coordonate.

b) Arătați că punctele A , B și C sunt coliniare.

c) Determinați coordonatele punctului M , mijlocul segmentului BC .

6. O persoană constată că după ce a cheltuit 25% din suma pe care a avut-o și încă 20% din restul rămas, mai are în portofel 252 lei. Ce sumă a avut inițial?

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle C = 30^\circ$. Știind că mediana $AM = 10$ cm, $M \in BC$, calculați:

a) perimetrul triunghiului ABC ;

b) valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABD}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}$, unde D este piciorul înălțimii duse din A pe ipotenuza

BC .

8. În cercul de centru O și rază $R = 8$ cm se construiește diametrul AB și o coardă CD , astfel încât $AB \cap CD = \{E\}$. Știind că $\sphericalangle BDC = 60^\circ$, calculați aria triunghiului AOC .

Algebră

Capitolul I Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}

PP Competențe specifice

- C₁. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- C₂. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C₃. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în \mathbb{R}
- C₄. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- C₅. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- C₆. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

PE-PP 1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr



Mulțimea numerelor naturale, notată cu \mathbb{N} , este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Observații:

- a) Mulțimea notată cu \mathbb{N}^* este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ și $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.
- b) Avem, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$:
 - i) $x + y \in \mathbb{N}$, $x \cdot y \in \mathbb{N}$ și **consecințele**: $x + y = 0$ înseamnă $x = y = 0$, iar $x \cdot y = 1$ înseamnă $x = y = 1$.
 - ii) $x - y \in \mathbb{N}$ numai dacă $x \geq y$, iar $x : y \in \mathbb{N}$ numai dacă **există** $z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y \cdot z = x$. Dacă acest lucru nu are loc, se folosește teorema **împărțirii cu rest**: $x = yz + t$, cu $t \in \mathbb{N}$, $0 \leq t < y$, $y \neq 0$.
 - iii) $x^y \in \mathbb{N}$, cu excepția cazului 0^0 .

Mulțimea numerelor întregi, notată cu \mathbb{Z} , este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Observații:

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; în plus, se definesc: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}$ și $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, avem:

- i) $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$.
- ii) Dacă $x^2 + y^2 = 0$, atunci $x = y = 0$.
- iii) $x : y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ dacă și numai dacă există $z \in \mathbb{Z}$, cu $x = yz$. În caz contrar, $x = yz + t$, unde $t \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq |t| < |y|$.

Mulțimea numerelor raționale, notată cu \mathbb{Q} , este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z} \right\}.$$

Observații:

a) Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, iar mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se numește mulțimea numerelor raționale **neîntregi**. De asemenea, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

b) Un **număr rațional** este reprezentat de o fracție de forma $\frac{x}{y}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}^*$.

Vom spune că două fracții $\frac{x}{y}$ și $\frac{z}{t}$, cu $x, z \in \mathbb{Z}$ și $y, t \in \mathbb{Z}^*$, se numesc **fracții echivalente** dacă $xt = yz$. Dată o fracție $\frac{x}{y}$, se obțin fracții echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**: $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$, cu $x \in \mathbb{Z}$ și $y, t \in \mathbb{Z}^*$;

ii) **simplificare**: $\frac{x}{y} = \frac{x : t}{y : t}$, cu $x \in \mathbb{Z}, y, t \in \mathbb{Z}^*$ și $t \mid x, t \mid y$.

c) O fracție $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ este **ireductibilă** dacă $(x, y) = 1$.

Un **număr rațional** care este **reprezentat** de o fracție $\frac{x}{y}$, $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$, se scrie sub formă **zecimală** împărțind numărătorul x la numitorul y .

În funcție de factorii în care se descompune numitorul fracției ireductibile $\frac{x}{y}$, fracția zecimală poate fi:

- i) **fracție zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de **2** sau de **5**;
- ii) **fracție zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conține **alți** factori decât **2** și **5**;
- iii) **fracție zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține atât factori de 2 sau/și numai factori de 5, cât și un alt factor prim.

Reciproc: Dacă un număr rațional este reprezentat printr-o **fracție zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracție ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracție zecimală:

i) **fracție zecimală finită:** $\overline{a, b_1 b_2 b_3 \dots b_n} = \frac{ab_1 b_2 b_3 \dots b_n}{10^n}$;

ii) **fracție zecimală periodică simplă:** $\overline{a, (b_1 b_2 b_3 \dots b_n)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$;

iii) **fracție zecimală periodică mixtă:**

$$\overline{a, b_1 b_2 \dots b_n (c_1 c_2 \dots c_m)} = \frac{\overline{ab_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_m} - \overline{ab_1 b_2 \dots b_n}}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{000 \dots 0}_{\text{de } n \text{ ori}}}$$

d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, avem $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$, $x : y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$, $x^y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$.

Mulțimea numerelor iraționale, notată cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este mulțimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinite** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

Mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} , este mulțimea formată din **reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale. În mod asemănător, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Avem **șirul incluziunilor**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$; e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
 f) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$; g) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$; i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;
 k) $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; m) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$; n) $\emptyset \not\subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$; o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $8 \in \mathbb{N}$; b) $8 \in \mathbb{Z}$; c) $8 \in \mathbb{Q}$; d) $8 \in \mathbb{R}$; e) $-6 \in \mathbb{Z}$;
 f) $-6 \in \mathbb{N}$; g) $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; h) $-8,3 \in \mathbb{R}$; i) $-\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$; j) $4,(5) \in \mathbb{Q}$;
 k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$; l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\sqrt{25 - (-3) \cdot (-8)} \in \mathbb{N}$; n) $[-(-3) + (-2)]^2 \in \mathbb{Z}$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$;
 d) $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; e) $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$; f) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$;
 g) $\{0\} \in \mathbb{R}$; h) $0 \notin \mathbb{R}^*$; i) $\{0\} \subset \mathbb{R}$; j) $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$.

❁ TESTUL 1 ❁

1. Efectuați:

- a) $(-3; 3) \cup (-5; 0)$; b) $(-2; 3) \cap [-1; 5]$; c) $(-\infty; 2] \cap (-3; 6)$;
 d) $[-5; 4) \cup (0; +\infty)$; e) $(-1; 4] \cap \mathbb{N}^*$; f) $(-4; 2) \cap \mathbb{Z}^*$.

2. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 5\}$.

- a) Scrieți mulțimea A sub formă de interval.
 b) Calculați $A \cap \mathbb{Z}^*$.
 c) Calculați $A \cup \{-4; -2; -1; 2; 3; 4; 6; 8\}$.

3. Arătați că $a \in [0, (2); 0, (3)]$, unde $a = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{17 \cdot 18}$.

4. Se consideră mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq \frac{5x+7}{2} < 16\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{7x+12}{9} \leq 6\right\}$.

Calculați $A \cap B \cap \mathbb{N}$ și $A \cup B \cap \mathbb{Z}$.

5. Stabiliți cărui interval îi aparține fiecare dintre numerele reale a , b și c care satisfac relația $(a+1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 25$.

❁ TESTUL 2 ❁

1. Efectuați:

- a) $[-7; 2) \cup [-3; 7]$; b) $[-5; 3) \cap (-3; 8]$; c) $(-\infty; 3] \cap [-3; +\infty)$;
 d) $[-6; 4) \cup (-1; +\infty)$; e) $(-2; 3] \cap \mathbb{N}^*$; f) $(-5; 2) \cap \mathbb{Z}^*$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq \frac{6x-2}{4} < 7\right\}$.

- a) Scrieți mulțimea A sub formă de interval.
 b) Calculați suma dintre cel mai mare număr negativ ce nu este în interval și cel mai mare număr întreg din interval.
 c) Calculați $A \cup \{-2; -1; 1; 2; 4; 5; 6; 7\}$.
 d) Calculați $A \cap (0; 6) \cap \mathbb{N}$.

3. Arătați că numărul $a = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

4. Dacă numerele reale a și b îndeplinesc condiția $(a+4)^2 + (b-5)^2 = 9$, arătați că $a < b$.

5. Se consideră numerele reale x și y , astfel încât $x \in [-2; 1]$ și $x+2 = 3y$. Determinați valoarea numărului real p , unde $p = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

PE-PP 6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (\leq , $>$, $<$),
unde $a, b \in \mathbb{R}$



O propoziție cu o variabilă care conține în scrierea sa unul dintre semnele: \geq , \leq , $>$ sau $<$ este o **inecuație**. Litera care apare ca variabilă se numește **necunoscută**.

Atribuind variabilei diverse valori, se obțin propoziții adevărate sau false. Numerele pentru care propoziția este adevărată se numesc **soluții** ale inecuației.

A rezolva o inecuație înseamnă a afla toate soluțiile acesteia, care sunt cuprinse în **mulțimea soluțiilor**.

Doă inecuații sunt **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observații:

În rezolvarea inecuațiilor se folosesc următoarele proprietăți ale inegalităților între numere:

- 1) Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$ și $a - c < b - c$.
- 2) Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$ și $a : c < b : c$.
- 3) Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $a \cdot c > b \cdot c$ și $a : c > b : c$.
- 4) Dacă $b < a$, se poate scrie și $a > b$.

Aceleași proprietăți sunt valabile și dacă înlocuim $<$ cu semnul \leq , iar semnul $>$ cu \geq .

● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

PE **Înțelegere** *

1. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Aflați ce elemente ale mulțimii A sunt soluții ale următoarelor inecuații:

- | | |
|------------------------|------------------------------|
| a) $2(x + 3) \leq 8$; | b) $3x - 2(x + 1) \leq -3$; |
| c) $2 x + 3 \leq 5$; | d) $3x + 2 \geq 5$. |

2. Rezolvați în \mathbb{R} inecuațiile:

- | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $4x - 10 < 30$; | b) $6x - 12 \leq 30$; | c) $-3x + 7 \geq -5$; |
| d) $-3x + 2 \geq -7$; | e) $2x + 1 \leq 11$; | f) $-5x + 4 \leq -16$; |
| g) $6x + 11 < -7$; | h) $7x - 12 \geq 30$; | i) $2x - 5 \leq 7$. |

3. Rezolvați în \mathbb{R} inecuațiile:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $2(x + 3) < x - 5$; | b) $3(x - 2) > 2(x + 1)$; | c) $2(x - 4) \geq 3(x - 1)$; |
| d) $3(x - 2) \geq x + 8$; | e) $7x + 4 < 3(x + 8)$; | f) $5(x + 1) \leq 3(x + 3)$; |
| g) $3(x - 1) > 2x + 9$; | h) $6(x - 1) > 4(x + 2)$; | i) $7(x + 3) \leq 5(x - 1)$. |

4. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care inecuațiile sunt adevărate:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{3}{x-1} < 0$; | b) $\frac{-2}{x+2} > 0$; | c) $\frac{-5}{3x+1} < 0$; |
| d) $\frac{7}{2x-5} > 0$; | e) $\frac{-1}{3x+7} \leq 0$; | f) $\frac{4}{2x-1} \geq 0$; |
| g) $\frac{-8}{-5x+1} > 0$; | h) $\frac{-2}{-3x+5} \leq 0$; | i) $\frac{-7}{-x+4} \geq 0$. |

Capitolul II

Calcul algebric în \mathbb{R}

PP Competențe specifice

- C₁. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C₂. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C₃. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- C₄. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- C₅. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- C₆. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere



Definiție. Se numește **expresie algebrică** o succesiune de numere și/sau litere legate între ele prin operații aritmetice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere).

Exemple: $7, x, 7x, 7\sqrt{3}x, 7\sqrt{3}x - 8y^2$.

Observații:

a) **Cea mai simplă** expresie algebrică obținută doar prin înmulțire cu numere și/sau litere se numește **termen** al expresiei algebrice.

Exemple: $7, x, xy, 8z^2y^3$.

b) **Numărul** care apare în scrierea unui termen al unei expresii algebrice se numește **coeficientul termenului**.

Exemple: $-7xy^2$ are coeficientul -7 , $18\sqrt{3}x^2z$ are coeficientul $18\sqrt{3}$, $-0,(7)z^2$ are coeficientul $-0,(7)$.

c) **Literele** care intră în scrierea unui termen alcătuiesc **partea literală** a sa.

Exemple: $-81x$ are partea literală x , $-8x^2y^3z$ are partea literală x^2y^3z .

d) Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleași **operații** care se efectuează cu numerele reale: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Aceste operații au **aceleași proprietăți** pe care le au operațiile cu numere reale.

1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Definiție. Se numesc **termeni asemenea** acei termeni care conțin aceeași succesiune de litere la aceeași exponenți.

Exemple: a) $-3x + 9 + 6x$, termenii asemenea sunt $-3x$ și $6x$;

b) $7\sqrt{5} + 11a - 7x^3z + 2\sqrt{5} + \frac{3}{5}x^3z$, termenii asemenea sunt $7\sqrt{5}$ și $2\sqrt{5}$, respectiv $-7x^3z$ și $\frac{3}{5}x^3z$.

Observații:

a) **Adunarea sau scăderea** a doi termeni asemenea este operația prin care se obține un termen asemenea cu cei inițiali, iar coeficientul noului termen se obține efectuând operațiile algebrice indicate asupra celor doi coeficienți ai termenilor inițiali.

b) **Operațiile** de adunare și scădere efectuate cu **termeni asemenea** se numesc operații de **reducere** a termenilor asemenea.

Exemple: i) $7x + 5x = 12x$; ii) $-7xy + 2xy = -5xy$; iii) $-3x^2 - 8x^2 = -11x^2$.

c) O **expresie algebrică** este considerată a fi scrisă în **forma canonică** dacă nu conține termeni asemenea.

d) **Produsul** dintre un număr real și o expresie algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare coeficient al termenilor ce compun expresia algebrică, cu respectarea regulilor de calcul cu numere reale.

Exemplu: $3(2x^2 - 5x + 5) - (4x^2 + 3x + 3y) - 4(x + y) = \underline{6x^2} - \underline{15x} + 15 - \underline{4x^2} - \underline{3x} - \underline{3y} - \underline{4x} - \underline{4y} = 2x^2 - 22x - 7y + 15$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

a) $4x - 3x + 5x$;

b) $7x^2 - 3x^2 + 3x^2$;

c) $2ab - 5ab$;

d) $9x^2 - 11x^2 - 9x^2$;

e) $-4,2y - 1,8y$;

f) $0,3a - 0,7a$;

g) $\frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{7}a^2 - \frac{a^2}{7}$;

h) $\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x$;

i) $2\sqrt{5}xy - 7\sqrt{5}xy$;

j) $8abc - 11abc$;

k) $y^2 + 13y^2 - 5y^2$;

l) $4x^2y^2 - 7x^2y^2 + 3x^2y^2$.

2. Reduceți termenii asemenea:

a) $7x + 2y - 4z - 5x + 6y + 3z$;

b) $3a - 9b + 2a + 7b - 4a - 5b$;

c) $8x - 3y - 5z - 9x - 4y + 3z$;

d) $13x^2 - 2x + 4x^2 - 11x - 15x^2 + 13x$;

e) $17xy - 21x^2y - 12xy + 23x^2y - 2x^2y$;

f) $7x - 9 - 11x + 12 + 4x$.

3. Scrieți în spațiul punctat termenul corespunzător obținerii unei propoziții adevărate:

a) $18x - 16x + \dots + 5x = 24x$;

b) $16x - 23x + \dots + 6x = 18x$;

c) $10a + 14a - \dots + 12a = 15a$;

d) $4x^2 - 5x^2 + \dots + 18x^2 = 0$;

e) $11xy - 7xy + \dots - 8xy = 21xy$.

* TESTUL 3 *

1. Descompuneți:

- a) $x^2 - 17x + 72$; b) $x^2 - 4x - 21$; c) $x^2 - 7x - 18$;
 d) $(x - \sqrt{3})^2 - 48$; e) $(\sqrt{2}x - 3)^2 - 32x^2$; f) $(4x + 3)^2 - 24x - 18$;
 g) $(2x + 3)^2 - 10x - 15$; h) $4x^3 + 4x^2 - x - 1$; i) $9x^3 + 9x^2 - 4x - 4$.

2. Dacă $3x + 2y = 5$ și $9x^2 - 4y^2 = 20$, calculați valoarea numărului:

$$n = (3x - 2y) + (3x - 2y)^2 + (3x - 2y)^3 + (3x - 2y)^4.$$

3. a) Stabiliți natura triunghiului de laturi a , b și c , care îndeplinesc condiția:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

b) Determinați valoarea reală a numărului x pentru care valoarea expresiei $4x^2 + 12x + 21$ este minimă.

c) Arătați că numărul $a = (x + 6)(x - 1) + x + 15$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

4. Dacă $a, b, c, t \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = t^4$, arătați că:

$$\sqrt{(t^4 + a^4)(t^4 + b^4)(t^4 + c^4)} \in \mathbb{Q}.$$

5. Descompuneți în factori:

- a) $4(5x - 3)^2 - 9(3x - 4)^2$; b) $x^4 - x^2 - 4x - 4$; c) $(4x - 3)^2 - (2x + 1)^2$;
 d) $x^2 - 2x - 15$; e) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 6) - 16$; f) $x^2 + 6x - 40$;
 g) $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) + 12$; h) $(x^2 + x)(x^2 + x - 4) - 5$; i) $(x^2 - x)(x^2 - x + 7) - 18$;
 j) $x^3 + 7x^2 - 18x$; k) $x^4 - x^2 + 1$; l) $x^3 - 4x^2 - 12x$.

B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP 7. Amplificarea. Simplificarea



Un raport în care termenii sunt expresii algebrice se numește **raport algebric** sau **fracție algebrică** sau **expresie algebrică rațională**.

Exemple: a) $\frac{a^2 + 7}{15}$; b) $\frac{5}{3x}$; c) $\frac{5a - 3y}{5x - 6}$; d) $\frac{x - \sqrt{5}}{x + 11}$.

Domaniul de definiție al unei fracții algebrice este mulțimea numerică în care iau valori literele ce participă în partea literală a expresiilor algebrice care intră în scrierea numărătorului și a numitorului fracției raționale, cu excepția acelor valori ale literelor care anulează numitorul.

Exemple: Pentru $\frac{5a - 3y}{5x - 6}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{6}{5} \right\}$, iar pentru $\frac{x - \sqrt{5}}{x + 11}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$.

Observație: Un raport algebric nu este definit pentru acele valori ale literelor care anulează numitorul.

Operația de **amplificare** a unei fracții algebrice constă în înmulțirea atât a numărătorului, cât și a numitorului acesteia cu o expresie algebrică nenulă.

Exemple: Raportul $\frac{3x}{x^4 + 2}$, $x \in \mathbb{R}$, amplificat cu $x^2 + 1$ devine $\frac{3x(x^2 + 1)}{(x^4 + 2)(x^2 + 1)}$.

Operația de **simplificare** a unei fracții algebrice constă în împărțirea atât a numărătorului, cât și a numitorului acesteia prin aceeași expresie algebrică nenulă.

Exemple: a) $\frac{144x^2}{156x^3}$, $x \in \mathbb{R}^*$, se simplifică prin $12x^2$ și devine $\frac{12}{13x}$;

b) $\frac{13x-13\sqrt{5}}{x^2-5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Raportul simplificat se obține astfel:

$$\frac{13(x-\sqrt{5})}{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})} = \frac{13}{x+\sqrt{5}}.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE **Înțelegere** *

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care următoarele fracții nu sunt definite:

- a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{13x^2}$; c) $\frac{x+1}{16x^2}$; d) $\frac{x+4}{x^2+1}$;
 e) $\frac{5x-2}{5x+2}$; f) $\frac{3x}{x-1}$; g) $\frac{5}{x^2-1}$; h) $\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$;
 i) $\frac{3x-5}{x^2+3x+2}$; j) $\frac{2x+3}{x(x+1)(x-3)}$; k) $\frac{7x+3}{4x^2-9}$; l) $\frac{xy+z}{x^2-3x+2}$.

2. Determinați domeniul de definiție pentru următoarele fracții algebrice:

- a) $\frac{5}{x}$; b) $\frac{7x+1}{9x^2}$; c) $\frac{3x+2}{x-1}$; d) $\frac{x-3}{x^2+4}$; e) $\frac{7x-3y}{x(x+1)}$;
 f) $\frac{2x+3}{x^2-1}$; g) $\frac{3x-7}{x^2-3}$; h) $\frac{2x+1}{x^2+5x+6}$; i) $\frac{12}{x^2-4x+4}$; j) $\frac{13x^2}{x(x+1)(x-4)}$.

3. Calculați valorile pe care le iau rapoartele:

- a) $\frac{x-7}{1+x+2x^2}$, pentru $x=7$; b) $\frac{x-3}{2x^2+5}$, pentru $x \in \{1, 3\}$;
 c) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2+4}$, pentru $x=2, y=2$; d) $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}$, pentru $x \in \{0, 1\}, y \in \{-1, 1\}$;
 e) $\frac{3x+2y-5z}{x^2+y^2+z^2+11}$, pentru $x=1, y=-1, z=0$.

4. (i) Amplificați cu $x \in \mathbb{R}^*$ rapoartele: a) $\frac{11}{x}$; b) $\frac{12}{x^2}$; c) $\frac{11x-3}{x^2+1}$; d) $\frac{8-x}{x^4+x^2+2}$.

(ii) Amplificați cu $2x+3$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, rapoartele:

- a) $\frac{11}{13x}$; b) $\frac{7}{x+1}$; c) $\frac{7-x}{x^2+3x+2}$; d) $\frac{2x-3}{4x^2+x}$.

Geometrie

Capitolul I Elemente ale geometriei în spațiu

PP Competențe specifice

- C₁. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- C₂. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- C₃. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- C₄. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- C₅. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- C₆. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei



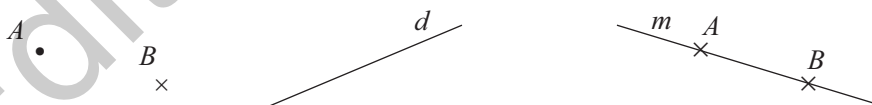
Punctul, dreapta și planul fac parte din noțiunile de bază ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

Punctul. Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuțit de foaia de scris:

- , ×. Se notează cu litere mari: A, B, C, \dots

Dreapta. Este formată din puncte și se reprezintă printr-un fir de ață foarte subțire întins la nesfârșit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici: a, b, d, \dots

Dacă punctele A și B sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu AB .



Planul. Poate fi asemănat cu suprafața liniștită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârșit în toate direcțiile. Se notează cu litere din alfabetul grec: $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \dots$. Un plan care conține trei puncte necoliniare A, B și C se notează prin (ABC) . Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

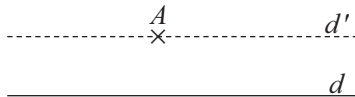


Propoziții despre puncte, drepte și plane

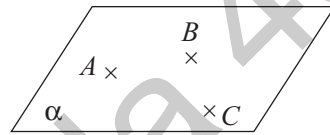
P₁. (Axioma dreptei) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Orice dreaptă are cel puțin două puncte distincte.



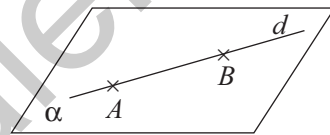
P₂. (Axioma paralelelor sau postulatul lui Euclid) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.



P₃. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.

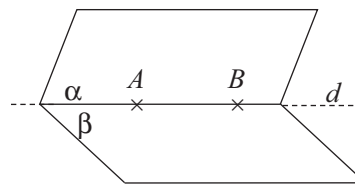


P₄. Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

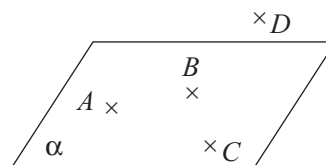


P₅. Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

Consecință: Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



P₆. Există patru puncte nesituate în același plan (acestea se numesc necoplanare).



● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

PE Înțelegere *

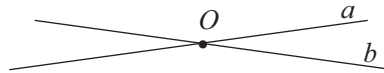
- Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:
 - Trei puncte necoliniare determină un
 - Prin două puncte distincte trece o și numai una.
 - Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o comună.
 - Patru puncte necoplanare determină un număr de drepte.
- Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
 - Oricare trei puncte sunt coplanare.

4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu; relația de paralelism în spațiu



Definiție. Două drepte care au **un singur punct comun** se numesc **drepte concurente**.

$$a \cap b = \{O\}$$



Definiție. Două drepte din același plan care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele**.

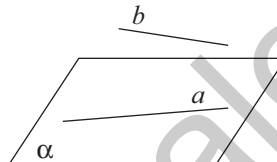
$$a \cap b = \emptyset$$



Definiție. Două drepte situate în **același plan** se numesc **drepte coplanare**.

Definiție. Două drepte care **nu au niciun punct comun și nu sunt paralele** se numesc **drepte necoplanare**.

$$a \cap b = \emptyset \text{ și } a \not\parallel b$$



Tranzitivitatea relației de paralelism în spațiu

Dacă două drepte distincte a și b sunt paralele cu o a treia dreaptă c , atunci dreptele a și b sunt paralele între ele.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

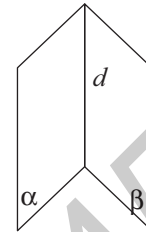
- Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - Două drepte paralele sunt coplanare.
 - Două drepte necoplanare nu sunt concurente.
 - Două drepte necoplanare pot fi paralele.
- Completați spațiile punctate cu răspunsurile corecte:
 - Dacă punctele A, B și C nu sunt coliniare, atunci dreptele AB și BC sunt
 - Dacă punctele A, B, C, D sunt necoplanare, atunci dreptele AC și BD sunt
- În cubul *ALGEBRIC*, precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - Dreptele AB și LR sunt paralele.
 - Dreptele AL și EC sunt coplanare.
 - Dreptele LI și AC sunt paralele.
 - Dreptele BC și LG sunt necoplanare.
- Dacă dreapta g este coplanară cu dreapta h , iar dreapta h este coplanară cu dreapta d , atunci dreptele g și d sunt coplanare?

13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane



Definiție. Reuniunea punctelor unei drepte d cu punctele a două semiplane mărginite de dreapta d se numește **unghi diedru**.

Observație: Dreapta comună celor două semiplane se numește **muchia diedrului**, iar cele două semiplane se numesc **fețele diedrului**.

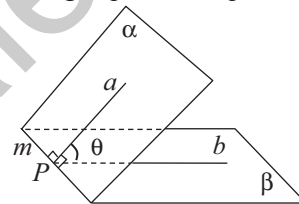


Definiție. Se numește **unghi plan corespunzător unghiului diedru** orice unghi format din două semidrepte, a, b , care au originea într-un punct $P \in d$, sunt conținute respectiv în cele două semiplane ce formează diedrul și sunt perpendiculare pe d .

Observație: Pentru poziții diferite ale punctului P pe dreapta d , se obțin unghiuri plane congruente.

Definiție. Măsura unui unghi diedru este măsura oricărui unghi plan corespunzător unghiului diedru.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = m \\ a \perp m, a \subset \alpha \\ b \perp m, b \subset \beta \\ a \cap b \cap m = \{P\} \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(a, b) = \theta$$



Definiție. Măsura unghiului dintre două plane secante este cea mai mică dintre măsurile celor patru unghiuri diedre formate în jurul drepte de intersecție a celor două plane.

Observații:

- Măsura unghiului dintre două plane paralele este egală cu 0° .
- Măsura unghiului dintre două plane este cuprinsă între 0° și 90° .

Definiție. Două plane concurente sunt perpendiculare, dacă determină unghiuri diedre drepte.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

- Pe planul triunghiului echilateral ABC , cu $AB = 24$ cm, se ridică perpendiculara $MA = 12$ cm.
 - Calculați lungimile segmentelor MB și MC .
 - Dacă D este mijlocul segmentului BC , arătați că $(MAD) \perp (MBC)$.
 - Calculați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de (MBC) cu (ABC) .
- Pe planul triunghiului dreptunghic și isoscel ABC , cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $BC = 24\sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara MA , cu $MA = 12\sqrt{2}$ cm.
 - Calculați aria și perimetrul triunghiului ABC .

PE-PP Teste recapitulative

Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

☀ TESTUL 1 ☀

A. Se scriu doar răspunsurile.

- (0,5p) 1. a) Rezultatul calculului $-3^0 + \sqrt{72} : \sqrt{18}$ este
- (0,5p) b) Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3; 2] \cap (-5; 0)$ este egal cu
- (0,5p) c) Media geometrică a numerelor 0,12 și 0,(3) este
- (0,5p) 2. a) Rezultatul calculului $(x-3)^2 + (x+2)^2 - 2(x+1)(x-1)$ este egal cu
- (0,5p) b) Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leq 3\}$ este $A =$
- (0,5p) c) Descompunerea în factori ireductibili a expresiei $(4x-5)^2 - 9x^2$ este
- (0,5p) 3. a) Cel mai mic număr natural, pentru care $\frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}$, este egal cu
- (0,5p) b) Valoarea numărului $a = |x+3| + |x-7|$, pentru $x \in [-3; 7]$, este
- (0,5p) c) Efectuând $(-5; 3] \cup [-3; 5)$, se obține intervalul
4. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, cu latura bazei $AB = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm.
- (0,5p) a) Lungimea segmentului AD' este de cm.
- (0,5p) b) Măsura unghiului format de AD' cu planul (ABC) este de °.
- (0,5p) c) Măsura unghiului format de AD' cu BB' este de °.

B. Se scriu rezolvările complete.

- (0,5p) 5. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația: $\frac{3x-2}{7} - \frac{2x-5}{5} > \frac{46-20x}{35}$.
- (0,5p) b) Stabiliți cărui interval aparțin numerele reale a , b și c , pentru care avem relația: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-2b-3c) = 11$.
- (0,5p) c) Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < \frac{6x+10}{2} < 20\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{2x+1}{3}\right| \leq 3\right\}$.
Determinați mulțimile $A \cap B$ și $A \cup B$.
6. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată care are $AB = 10$ cm și $SO = 5\sqrt{2}$ cm, unde $SO \perp (ABC)$.
- (0,25p) a) Calculați măsura unghiului format de SA cu planul (SBD) .
- (0,25p) b) Calculați distanța de la O la planul (SBC) .
- (0,5p) c) Dacă M este mijlocul laturii BC și N este mijlocul muchiei SC , arătați că $(OMN) \parallel (SAB)$.
- (0,5p) d) Calculați măsura unghiului dintre dreptele MN și BD .

PE-PP Probleme pentru pregătirea olimpiadei și a concursurilor școlare

ALGEBRĂ

1. Determinați $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, astfel încât numărul:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

să aparțină mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+a} + \frac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b} \in \mathbb{Z}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 1$. Demonstrați că:

a) $\sqrt{a^4 + 4b^2} + \sqrt{b^4 + 4a^2} = 2$; b) $-\sqrt{2} \leq a+b \leq \sqrt{2}$.

4. a) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$. Atunci $a = c$ și $b = d$.

b) Arătați că nu există numerele raționale a, b, c, d , astfel încât:

$$1 + \sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^2 + (c + d\sqrt{3})^2.$$

5. Demonstrați că, oricare ar fi numerele raționale x, y, z , diferite două câte două, numărul

$$n \in \mathbb{Q}, \text{ unde } n = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}.$$

6. Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $a = \sqrt{4n^2 + 20n + 65}$ să fie număr natural.

7. Demonstrați că, dacă numerele întregi x, y, z verifică relația $xy + z(x - y) = y^2 + 7$, atunci $|x + z| = 8$ și $|x - 2y - z| = 6$.

8. Arătați că, oricare ar fi $a, b, c \geq 0$, $a \geq b$ și $a \geq c$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - c^2 + 4ab} + \sqrt{a^2 - b^2 + 4c^2 + 4ac} \leq 2(a + b + c).$$

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \cdot b = 1$. Demonstrați inegalitatea $(a - 3)^2 + (b - 3)^2 \geq 7$.

10. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere raționale nenule, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, atunci

numărul $N = \left(\frac{xy}{z} + 1\right)\left(\frac{yz}{x} + 1\right)\left(\frac{zx}{y} + 1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$.

11. Fie numerele reale distincte a și b care au proprietățile: $a^2 + b \in \mathbb{Q}$ și $b^2 + a \in \mathbb{Q}$. Arătați că:

a) numerele $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ și $b = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietățile date;

b) dacă $a + b \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, atunci a și b sunt numere raționale;

GEOMETRIE

26. Pe planul triunghiului echilateral ABC de latură $2a$ se duc perpendicularele AM și d , $C \in d$. Fie $N \in AM$, astfel încât $AN = a$ și $MN = 2a$.

- Justificați și calculați distanța de la A la planul (MBC) .
- Justificați și calculați măsura unghiului format de planele (MBC) și (NBC) .
- Câte puncte diferite $P_i \in d$ sunt, astfel încât $\triangle BMP_i$ să fie dreptunghic pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$? Calculați de fiecare dată lungimea segmentului $[CP_i]$.

O.L. Alba, 2011

27. Segmentele AB și CD sunt situate pe drepte necoplanare, M este mijlocul segmentului AB , iar $N \in CD$ astfel încât $CN = 3 \cdot ND$. Se notează cu X, Y, Z, T punctele $X \in CM$ cu $MX = 3 \cdot CX$, $Y \in AN$ cu $AN = 2 \cdot AY$, $Z \in MD$ cu $MZ = 3 \cdot ZD$, $T \in BN$ cu $BN = 2 \cdot BT$. Verificați coplanaritatea punctelor X, Y, Z, T .

O.L. Arad, 2011

28. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ se duc $AQ \perp A'B$, $Q \in A'B$, $CR \perp BC'$, $R \in BC'$ și $DP \perp BD'$, $P \in BD'$.

- Arătați că $(AQP) \perp (CRP)$.
- Dacă $QR \parallel (ABC)$, atunci $AB \equiv BC$.

prof. Sorin Peligrad, O.L. Argeș, 2011

29. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC , respectiv CD . Se știe că $\sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$.

- Arătați că $\sphericalangle MNP = 90^\circ$.
- Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

prof. Ion Roșu, O.L. Argeș, 2011

30. Pe planul triunghiului ABC , cu laturile $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$ și $AC = 1$, se ridică perpendiculara $AM = \sqrt{2}$.

- Arătați că MC și BC sunt perpendiculare.
- Aflați măsura unghiului dintre MC și (AMB) .

O.L. Bacău, 2011

31. Fie triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm și $AM \perp (ABC)$, cu $AM = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați:

- distanța de la M la BC ;
- distanța de la A la (MBC) ;
- măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și (MBC) .

O.L. Bihor, 2011

32. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $MA \perp (ABC)$, $AB = AM = \sqrt{2}$ cm. Fie $E \in (BC)$, astfel încât $EC = 1$ cm.

- Arătați că $BD \perp MC$.
- Calculați distanța de la punctul M la dreapta DE .
- Calculați distanța de la punctul A la planul (MCD) .

prof. Ioan Ioja, O.L. Bistrița-Năsăud, 2011

33. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Fie O centrul pătratului $ABCD$ și M mijlocul segmentului AO . Planul α conține punctul M și este paralel cu planul $(AB'D')$.

- Demonstrați că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul α .
- Dacă planul α intersectează dreptele $B'C'$ și $D'C'$ în punctele N , respectiv P , arătați că punctul M este egal depărtat de planele $(A'B'C')$ și (PNC) .

O.L. București, 2011

Indicații și răspunsuri

SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE POT FI CONSULTATE AICI:
(Scanați codul QR cu camera telefonului, nu din aplicația Mate2000+)



RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

Testul 1: 1. a) $2\sqrt{3}$; b) -12 ; c) $\frac{7\sqrt{2}}{5}$. 2. a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{-1, 4\}$; c) $S = \{8\}$; d) $S = \left\{\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right\}$; e) $S = \{-8, 2\}$. 3. $m_g = 6$. 4. a) $S = \{(4, -3)\}$; b) $S = \{(3, 2)\}$. 5. b) $AB = 3\sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$; $AC = 5\sqrt{5}$; $AC = AB + BC \Rightarrow A, B, C$ – coliniare; c) $M(2; 5)$. 6. 420 lei. 7. a) $\mathcal{P} = 10(3 + \sqrt{3})$ cm; b) $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABD}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$.

8. a) Dacă $\sphericalangle BDC = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = 60^\circ$, deci $\triangle AOC$ – echilateral; $\mathcal{A}_{\triangle AOC} = 16\sqrt{3}$ cm².

Testul 2: 1. a) 36; b) $3\sqrt{3}$; c) $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$. 2. a) $S = \{-2\}$; b) $S = \{7\}$; c) $S = \{-4, 2\}$; d) $S = \{-1, 6\}$; e) $S = \{-6, 2\}$. 3. 320 lei. 4. a) $S = \{(2, -3)\}$; b) $S = \{(3, 4)\}$. 5. $m_a = 5\sqrt{6}$; $m_g = 12$. 6. b) $AB = 5$, $AC = 5$; $BC = 5\sqrt{2}$. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora. 7. a) $BC = 24$ cm; $DM = 6$ cm $\Rightarrow BD = 6$ cm; $AB = 12$ cm și $AC = 12\sqrt{3}$ cm. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 72\sqrt{3}$ cm² și $\mathcal{P}_{\triangle ABC} = 12(3 + \sqrt{3})$ cm; b) 25%. 8. a) $\mathcal{A}_{\triangle CMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\triangle AMN} - \mathcal{A}_{\triangle MNC} - \mathcal{A}_{\triangle NDC} = 950$ cm²; b) $MN = 50$ cm; $d(C; MN) = 38$ cm; c) $\sin(\sphericalangle CNM) = \frac{19\sqrt{26}}{130}$.

Testul 3: 1. a) 4; b) 1; c) 128. 2. a) $S = \{2\}$; b) $S = \{4\}$; c) $S = \{1, -2\}$; d) $S = \left\{-\frac{10}{3}, 4\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$.

3. 35 ani (mama); 14 ani (fiul). 4. a) $S = \{(-2, -3)\}$; b) $S = \{(2, -1)\}$. 5. $a = 24$; $b = 6$; $m_a = 15$; $m_g = 12$.

6. b) $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 48$ (u²); $\mathcal{P}_{\triangle ABC} = 32$ (u). 7. a) Se arată că $\sphericalangle B = 60^\circ$. Dacă $CE \perp AB \Rightarrow CE = 6\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 108\sqrt{3}$ cm²; b) Se calculează $\mathcal{A}_{\triangle BDC} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\triangle ADB} = 36\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow d(D; BC) = 6\sqrt{3}$ cm;

c) Cum $DC \parallel AB$ și $DC = \frac{AB}{2}$, atunci CD este linie mijlocie în $\triangle MAB \Rightarrow MD = DA = 12$ cm și $MC = BC = 12$ cm, deci $\triangle MAB$ – echilateral; $\mathcal{A}_{\triangle MAB} = 144\sqrt{3}$ cm². 8. a) $\widehat{AC} = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 30^\circ \Rightarrow AM = 10$ cm; $BC = 20\sqrt{3}$ cm; $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}} \Rightarrow R = 20$ cm; b) $MA' = 30$ cm $\Rightarrow BA' = CA' = 20\sqrt{3}$ cm;

$\mathcal{A}_{\triangle BAC} = \frac{BC \cdot AA'}{2} = 400\sqrt{3}$ cm²; $\mathcal{P}_{\triangle BAC} = 40(\sqrt{3} + 1)$ cm.

Testul 4: 1. a) $-16\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $20\sqrt{2}$. 2. $a = \frac{4}{3}$; $b = \frac{4}{3}$; $m_g = \frac{4}{3}$. 3. a) $S = \{3\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \{-\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\}$; d) $S = \{-6, 2\}$; e) $S = \{-6, 7\}$. 4. 36 ani; 12 ani; peste 12 ani. 5. a) $S = \{(-3, -4)\}$; b) $S =$

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr

1. Adevărate: a), b), d), f), h), j), k), l), m); false: c), e), g), i), n), o). 2. Adevărate: a), b), c), d), e), g), h), i), j), k), l), m), n); false: f). 3. Adevărate: a), b), e), g), h), i); false: c), d), f), j). 4. a) F.

Contraexemplu: $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 12$; b) A; c) A; d) A; e) F. $(3 + \sqrt{5})^2 = 14 + 6\sqrt{5}$; f) A. 5. $\frac{60}{100}$; $\frac{72}{100}$;

$\frac{60}{100}$; $\frac{175}{100}$. 6. $a = 60$. 7. a) $\frac{6}{10}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{30}{50}$; b) $\frac{4}{8}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{52}{396}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{20}{44}$; c) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{35}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{22}$; $\frac{6}{17}$.

8. (i) $\frac{1}{2}$; $\frac{61}{37}$; $\frac{4}{21}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{19}{72}$; (ii) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{55}{1133}$; $\frac{4}{21}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{35}{56}$; $\frac{19}{72}$; (iii) $\frac{61}{37}$; $\frac{85}{15}$; (iv) $\frac{14}{2 \cdot 7}$; $\frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{60}$.

9. a) (i) $x \in \{4, 5, 7, 11\}$; (ii) $x \in \{0, 1, 3, 4, 5, 8\}$; (iii) $x \in \{1, 2, 3, 8\}$; (iv) $x \in \{0, 1, 3, 10\}$; b) $x \in \{0, 2\}$; c) $x \in \{2, 6\}$. 10. 0,8; 2,56; 0,3125; 0,136; 4,(3); 0,5(3); 1,8(6); 2,8(3); 1,9(4).

11. $\frac{83}{20}$; $\frac{24}{11}$; $\frac{39}{110}$; $\frac{1267}{500}$; $\frac{319}{900}$; $\frac{28}{15}$; $\frac{277}{20}$; $\frac{181}{36}$; $\frac{401}{400}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{601}{300}$. 12. $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{-11, -10, -9,$

$-8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $C = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $E = \{9, 16, 25, 36, 49\}$; $F = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. 13. $B = \{0, -0,6, 0,6, 5, -5\}$. 14. a) A; b) A; c) F.

15. a) F; b) A; c) F. 16. $A = \left\{4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}, \frac{5\sqrt{2}}{3}, 1, 3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, -2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Z} =$

$= \{-2, 1, 4\}$; $A \cap \mathbb{Q} = \left\{-2, 1, 4, \frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{10}\right\}$; $A \cap \mathbb{R} = A$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left\{\frac{5\sqrt{2}}{3},$

$3\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{3}}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$. 18. a) A; b) A; c) A; d) A; e) A; f) A. 19. a) $u(5n + 3) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 3 \neq k^2$;

b) $u(5n + 8) \in \{3, 8\} \Rightarrow 5n + 8 \neq k^2$; c) Orice pătrat perfect este de forma $7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 4$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 7n + 3 \neq x^2$; d) $n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2$, de unde $n < \sqrt{n^2 + n} < n + 1$, adică $\sqrt{n^2 + n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

e) Analog d), $4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1$, adică $2n < \sqrt{4n^2 + n} < 2n + 1$, așadar $\sqrt{4n^2 + n}$ este între doi întregi consecutivi, deci irațional; f) Ultima cifră este 3; g) Ultima cifră este 3; h) Ultima cifră este 3; i) Ultima cifră este 2. 20. $1 \in \mathbb{Q}$; $3 - \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 21. $x = 441$; a) A; b) F; c) A; d) A. 22. $x =$

$= 27$; a) A; b) F; c) A; d) F. 23. $x = 2010$; a) A; b) A; c) F; d) A. 24. a) $A = \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$;

b) $B = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\}$; c) $C = \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$. 25. $\overline{ab} = 65$. 26. a) $a = 3^n \cdot 2^n$; b) $n = 3$.

27. a) $x = 7$; b) $x = 8$; c) $x = 0$; d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 28. a) $a = 2$; $b = -5$; b) $a = -1$; $b = 8$;

c) $a = -6$; $b = 16$. 29. Fie $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$. Cum $11r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 11$ și, analog,

$13r \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \mid 13 \Rightarrow q = 1$, deci $r = p \in \mathbb{Z}$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei

1. a) plan; b) dreaptă; c) dreaptă; d) 6. 2. a) A; b) A; c) A; d) A. 3. AB, AC, AE, BC, BD, DE . 4. a) 6; b) 4; c) 6. 5. a) o infinitate; b) o infinitate. 6. a) 8 drepte; b) $(MAB) \cap \alpha = AB; (DBC) \cap \alpha = BC; (MAC) \cap \alpha = AC$; c) $(BDC) \cap (MAC) = DC$. 7. a) AB, AC, AD, BC, BD, DC ; deci, 6 drepte; b) $BC = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}}{d(A, BC)} = 12 \text{ cm}; \mathcal{A}_{\Delta BCD} = 90 \text{ cm}^2$. 8. a) $\mathcal{A}_{\Delta DAM} = 72\sqrt{5} \text{ cm}^2$; b) $MN = 4\sqrt{15} \text{ cm}$. 9. Se

arată că ΔMAD este dreptunghic, $\sphericalangle M = 90^\circ$; $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^2$. 10. Se arată că ΔMAN este dreptunghic, $\sphericalangle MAN = 90^\circ$; $\mathcal{A}_{\Delta MAN} = 36\sqrt{5} \text{ cm}^2$. 11. $\mathcal{A}_{\Delta MAD} = 24 \text{ cm}^2$. 12. a) 6 drepte; b) 15 drepte. 13. a) 8 drepte; b) 10 drepte. 14. Dacă cele 5 puncte coplanare sunt coliniare, se determină 6 drepte. Dacă din cele 5 puncte, doar 4 sunt coliniare, atunci se determină 10 drepte. Nu se pot obține 9 drepte.

2. Determinarea planului

1. $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$. 2. a) A; b) A; c) F. 3. Din prima secundă. 4. a) $(MAB), (MAC), (MAD), (MBC), (MBD), (MCD), (ABC)$; b) $(MAD) \cap (ABC) = AD; (MAC) \cap (MBD) = MO; (MAC) \cap (MBC) = MC$. 5. a) A; b) A; c) F; d) A; e) F. 6. a) $(ABC), (ABN), (ABD), (ACD), (ACM), (AMN), (BCD)$; b) $(AMN) \cap (BCD) = MN; (ADC) \cap (AMN) = AN; (AMN) \cap (ABD) = AM$. 7. a) $(ABC) \cap \alpha = BC; M \in AD \subset (ABC); M \in \alpha \Rightarrow M \in BC$; b) $\Delta MDC \sim \Delta MAB \Rightarrow MA = 48 \text{ cm}$ și $MB = 60 \text{ cm}; \mathcal{P}_{\Delta MAB} = 132 \text{ cm}$ (fig. 1). 8. a) $EF \cap \alpha = \{P\}; P \in EF \subset (ABC); P \in \alpha$; cum $(ABC) \cap \alpha = BC \Rightarrow P \in BC$; b) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ – dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ \Rightarrow EF = 10 \text{ cm}$ (cu teorema lui Pitagora în ΔAEF); $\mathcal{P}_{\Delta BCFE} = 92 \text{ cm}$ (fig. 2). 9. $(MQT) \cap (NRP) = RT$ (fig. 3). 10. a) $M \in BC \subset (ABC)$ și $M \in \alpha$. Cum $(ABC) \cap \alpha = AD \Rightarrow M \in AD$ (fig. 4); b) Se observă că DC este linie mijlocie în ΔMAB , deci $AD = DM = 15\sqrt{3} \text{ cm}; \mathcal{A}_{\Delta MAB} = 450\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 11. Pot determina un plan sau maxim 7 plane. 12. a) $MA; MB; MC; MD; ME; MF; AB; AC; AD; AE; AF; BC; BD; BE; BF; CD; CE; CF; DE; DF; EF$; b) 16 plane. 13. a) 5; b) 10.

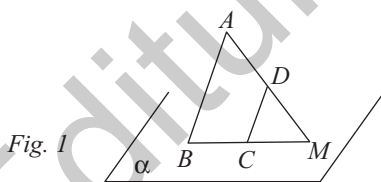


Fig. 1

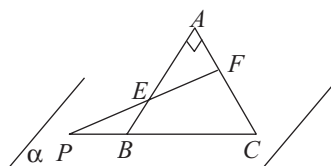


Fig. 2

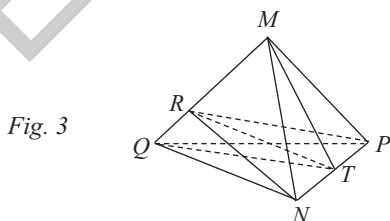


Fig. 3

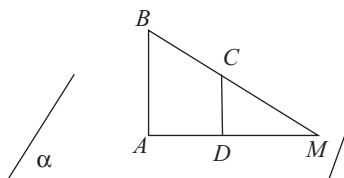


Fig. 4

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale5

ALGEBRĂ

Capitolul I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr	13
<i>Test de autoevaluare</i>	19
2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută. Aproximarea numerelor reale.....	21
Recapitulare și sistematizare prin teste	26
<i>Test de autoevaluare</i>	27
3. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor.....	29
4. Intervale în \mathbb{R} . Definiție. Reprezentare pe axă	30
5. Operații cu intervale.....	35
<i>Test de autoevaluare</i>	41
Recapitulare și sistematizare prin teste	43
6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, >, <$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	44
<i>Test de autoevaluare</i>	47
Recapitulare și sistematizare prin teste	49

Capitolul II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere.....	50
1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere.....	51
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	54
3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a numerelor reale reprezentate prin litere.....	58
4. Ordinea efectuării operațiilor cu expresii algebrice	61
<i>Test de autoevaluare</i>	65
Recapitulare și sistematizare prin teste	67
5. Formule de calcul prescurtat	68
<i>Test de autoevaluare</i>	73
Recapitulare și sistematizare prin teste	75
6. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R}	76
6.1. Metoda factorului comun	76
6.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat	79
6.3. Gruparea termenilor.....	83
6.4. Metode combinate	85
6.5. Maxime și minime. Inegalități algebrice	90
<i>Test de autoevaluare</i>	93
Recapitulare și sistematizare prin teste	95
B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	96
7. Amplificarea. Simplificarea	96
<i>Test de autoevaluare</i>	103

GEOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea drepte	105
2. Determinarea planului	108
3. Corpuri geometrice	110
3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat	110
3.2. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul	112
3.3. Cilindrul circular drept. Conul circular drept	116
<i>Test de autoevaluare</i>	119
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu; relația de paralelism în spațiu	121
5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele; unghiul a două drepte în spațiu; drepte perpendiculare	123
6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan	125
<i>Test de autoevaluare</i>	129
Recapitulare și sistematizare prin teste	131
7. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	132
8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con circular drept	136
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	139
10. Perpendicularitate	140
10.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan	140
<i>Test de autoevaluare</i>	143
10.2. Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept	145
10.3. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con	146
<i>Test de autoevaluare</i>	149
Recapitulare și sistematizare prin teste	151
10.4. Plane perpendiculare	152
11. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	154
12. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment	156
<i>Test de autoevaluare</i>	159
13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane	161
<i>Test de autoevaluare</i>	165
Recapitulare și sistematizare prin teste	167
14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele	168
<i>Test de autoevaluare</i>	173
Recapitulare și sistematizare prin teste	175
15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	176
TESTE RECAPITULATIVE	178
PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI ȘI A CONCURSURILOR ȘCOLARE	183
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	187