FLORIN STĂNESCU

PROBLEME DE CALCUL MATRICEAL

OLIMPIADE, CONCURSURI ȘCOLARE ȘI BACALAUREAT

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Soției mele, Gabriela Felicia,
cu gratitudine

Argument

Această lucrare conține probleme de calcul matriceal, probleme în care esențiale sunt următoarele noțiuni:

– rangul unei matrice;
– vectorii proprii și valorile proprii ale unei matrice;
– puterile naturale ale unei matrice;
– determinantul unei matrice.

Am considerat că este mai util să împart lucrarea în două capitole, *Cazuri particulare* și *Cazul general*, problemele fiind însoțite de soluții aproape integrale, iar acolo, unde am considerat că este mai avantajos în perspectiva implicării cititorului în rezolvarea problemelor, am prezentat numai câteva scurte, dar esențiale, indicații. La începutul lucrării este prezentat un Breviar teoretic cu noțiuni importante din calculul matriceal, iar la sfârșitul fiecărui capitol se găsesc cinci teste utile pentru exersarea abilităților și competențelor specifice.

Cele peste 450 de probleme au fost selecționate din următoarele surse:

1) subiecte date la olimpiadele naționale;
2) subiecte date la concursurile naționale;
3) probleme apărute în prestigioase reviste de specialitate;
4) probleme clasice din domeniu;
5) probleme ale autorului.

Un instrument util de selecție a problemelor s-a dovedit a fi internetul și, în special, site-ul Mathlinks.

Odată lămurite aceste noțiuni de către elevii ce se pregătesc pentru olimpiadele de matematică, bacalaureat şi pentru admiterea la facultate, stârnind curiozitatea pasionaților, nu pot decât să-i invit pe aceștia să-și exerseze „răbdarea” către aflarea unor soluții elegante.

Culegerea poate de folos profesorilor în pregătirea lecțiilor de la clasă sau pentru exersarea abilităților matematice ale elevilor din centrele de excelență.

Urez succes tuturor celor ce folosesc această carte ca un instrument de antrenament!

Autorul

Breviar teoretic

- (*Sylvester*)

  i) $(\forall) A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci:
$$rangA + rangB - n \le rang(AB) \le \min\{rangA; rangB\};$$
  ii) $(\forall) A_1, A_2, ..., A_m \in M_n(\mathbb{C})$, atunci:
$$rang(A_1 A_2 \cdot ... \cdot A_m) \ge \sum_{k=1}^{m} rang(A_k) - (m-1)n \; .$$
- $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $rang(A+B) \le rang(A) + rang(B)$;
- Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci $rang(A) = rang(AA^T)$;
- Dacă $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ și $rangA > rangB$, atunci $rangA^2 > rangB^2$.
- Dacă $A^2 = O_3$, atunci $rangA = 1$ și $TrA = 0$;
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ și $rangA \le 1$, atunci $\det(I_n + A) = 1 + TrA$;
- Dacă $q, m \in \mathbb{N}^*, q | m$, atunci $rang(I_n - A^m) \ge rang(I_n - A^q)$;
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice inversabilă, atunci $rang(AB) = rang(B)$.
- Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C}), rangX = n, rangA < rangB$, atunci:
$$rang(AX) < rang(BX).$$
- Avem $rangA = rangB \Leftrightarrow$ există matricele inversabile X, Y astfel încât:
$$A = XBY \; .$$
- Dacă $rangA = r$, atunci există matricele nesingulare $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $QAP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $rangA = r$, atunci există $B \in M_{n,r}(\mathbb{C})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A = BC$, iar $rangB = rangC = r$.
- Numărul complex λ se numește valoare proprie pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$, dacă există o matrice coloană nenulă $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot X = \lambda \cdot X$.

• Matricea $X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$ se numește vector propriu pentru A, corespunzător valorii proprii A.
• Mulțimea valorilor proprii ale matricei A se numește spectrul matricei A și se notează cu $S_p(A)\subset\mathbb{C}$.
• Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică, atunci $\lambda\in\mathbb{C}$ este o valoare proprie pentru matricea A dacă și numai dacă $\det(A-\lambda I_n)=0$.
• Dacă $A\in M_n(C)$ este o matrice pătratică, atunci polinomul $p_A(x)=\det(xI_n-A)$ se numește polinom caracteristic al matricei A, iar ecuația $p_A(x)=0$ se numește ecuația caracteristică a matricei A.
• Pentru $A\in M_n(C)$ și $i_1,i_2,...,i_k\in\{1,2,...,n\}$, k numere distincte, notăm $d_{i_1,i_2,...,i_k}$ determinantul matricei obținute din matricea A prin suprimarea liniilor și coloanelor cu numerele $i_1,i_2,...,i_k$.Acesta este un minor principal de ordinul $n-k$ al matricei A. Dacă σ este o permutare de gradul k, atunci $d_{i_1,i_2,...,i_k}=d_{i_{\sigma(1)},i_{\sigma(2)},...,i_{\sigma(k)}}$.
• Dacă $A\in M_n(C)$, atunci: $p_A(x)=x^n-C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}-...+(-1)^nC_n$, unde C_k este suma minorilor principali de ordinul k. Avem $C_1=TrA$, $C_n=\det A, C_{n-1}=TrA^*$, deci $p_A(x)=x^n-TrAx^{n-1}+-...+(-1)^n\det A$.
În particular, dacă $S_p(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$, avem relațiile:

• $TrA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

• $\sum_{1\le i\le j\le n}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}\lambda_i\lambda_j$

• $\det A=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

• Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ satisface ecuația $\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m=0$, atunci orice valoare proprie a lui A satisface aceeași ecuație.
• Astfel, pentru $n=2$, ecuația caracteristică este: $x^2-TrA\cdot x+\det A=0$, iar pentru $n=3$, ecuația caracteristică este: $x^3-TrA\cdot x^2+TrA^*\cdot x-\det A=0$.
• Fie $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ valorile proprii ale matricei $A\in M_n(C)$. Dacă considerăm polinomul $f=a_0X^k+a_1X^{k-1}+...+a_{k-1}X+a_k$, atunci valorile proprii ale lui

$f(A)=a_0A^k+a_1A^{k-1}+...+a_{k-1}A+a_kI_n$ sunt $f(\lambda_1),f(\lambda_2),....,f(\lambda_n)$, iar $\det f(A)=f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)\cdot....\cdot f(\lambda_n)$.

• Dacă λ este o valoare proprie a matricei A, atunci λ^k este o valoare proprie pentru matricea A^k, iar dacă matricea A este inversabilă, atunci λ^{-k} este o valoare proprie a matricei $A^{-k}, k\geq 1$.

• Matricele AB și BA au aceleași valori proprii.

• (*Hamilton-Cayley*) Orice matrice pătratică $A\in M_n(C)$ este rădăcină a polinomului său caracteristic, adică $p_A(A)=O_n$.

• Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice care comută, atunci valorile proprii ale matricei $A + B$ sunt de forma $a + b$, unde a şi b sunt valori proprii pentru matricele A, respectiv B

Demonstrație. Fie $c\in\mathbb{C}$ o valoare proprie pentru matricea $A + B$ și $X_{n,1}(\mathbb{C})\neq O$ un vector propriu corespunzător. Atunci $(A+B)X=cX$, de unde $AX=(c\cdot I_n-B)X$. Dacă $a_1,a_2,...,a_n$ sunt valorile proprii ale matricei A, atunci $(A-a_iI_n)X=((c-a_i)I_n-B)X, i=\overline{1,n}.$. Mai departe:

$$(A-a_2I_n)(A-a_1I_n)=(A-a_2I_n)((c-a_1)I_n-B)X=$$
$$=((c-a_1)I_n-B)(A-a_2I_n)X=((c-a_1)I_n-B)((c-a_2)I_n-B)X,$$

deoarece $AB=BA$. Astfel, înmulțind cele n relații de mai sus, obținem $\left(\prod_{i=1}^{n}(A-a_iI_n)\right)X=(-1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}(B-(c-a_i)I_n)\right)X.$ Cum $\prod_{i=1}^{n}(A-a_iI_n)=O_n$ și $X_{n,1}(\mathbb{C})\neq O$, obținem că $\det\left(\prod_{i=1}^{n}(B-(c-a_i)I_n)\right)=0.$ Astfel, există i pentru care avem $\det(B-(c-a_i)I_n)=0$, deci $b_i=c-a_i$ sunt valori proprii ale matricei B, ceea ce încheie demonstrația.

• Rangul unei matrice este mai mare sau egal decât numărul de valori proprii nenule ale matricei.

• Fiind dată o matrice $A\in M_n(K)$, K corp de numere, există un unic polinom monic de grad n, $m_A(X)\in K[X]$ astfel încât $m_A(A)=O_n$. Acest polinom se numește polinom minimal al lui A.

• (*Frobenius*) Fie K un corp de numere, $A\in M_n(\mathbb{C})$. Atunci, polinomul minimal $m_A\left(X\right)$ și polinomul caracteristic al lui A, $p_A\left(X\right)$, au aceiași divizori ireductibili în $K\left[X\right]$.

• Dacă matricea $A\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ are valorile proprii $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, atunci există și sunt unice matricele $B,C\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ astfel încât:

$$A^n=\begin{cases}\lambda_1^n B+\lambda_2^n C, \lambda_1\neq\lambda_2\\ \lambda_1^n B+n\lambda_1^n C, \lambda_1=\lambda_2\end{cases}, n\geq 1.$$

• Dacă matricea $A\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ are valorile proprii $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, atunci:

$$A^n=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}A+\lambda_1\lambda_2\dfrac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}I_2, \lambda_1\neq\lambda_2\\ n\lambda_1^{n-1}A+\lambda_1^n\left(1-n\right)I_2, \lambda_1=\lambda_2\end{cases}, n\geq 1.$$

Enunţuri

Capitolul A. Cazuri particulare

A.I. *n* = 2

Probleme rezolvate

R.A.1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Din enunț avem că $\det X^{n-2} \cdot \det\left(X^2 + I_2\right) = 0$, de unde $\det X = 0$ sau $\det\left(X^2 + I_n\right) = 0$. Dacă $\det\left(X^2 + I_n\right) = 0$, atunci:

$$\det\left(X + iI_2\right) \cdot \det\left(X - iI_2\right) = 0 \Rightarrow \left(\det X + iTrX - 1\right)\left(\det X - iTrX - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\det X - 1\right)^2 + \left(TrX\right)^2 = 0 \Rightarrow \det X = 1 \text{ și } TrX = 0 \Rightarrow X^2 + I_2 = O_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X^n + X^{n-2} = O_2$, contradicție. Astfel, $\det X = 0$, ceea ce implică, inductiv, că $X^k = \left(TrX\right)^{k-1} X, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$. De aici:

$$\left[\left(TrX\right)^{n-1} + \left(TrX\right)^{n-3}\right] X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(TrX\right)^n + \left(TrX\right)^{n-2} = 2.$$

Pentru n impar, ultima ecuație are soluția unică $TrX = 1$, ceea ce implică $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru n par, obținem $TrX \in \{-1, 1\}$, ceea ce implică $X = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

R.A.2. Considerăm mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Arătați că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, mulțimea M conține exact două submulțimi H cu n elemente stabile.

Marcel Țena

Soluție. Se observă că, dacă $XY = O_2, X, Y \in M$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$. De asemenea, $XY = YX$, $(\forall) X, Y \in M$. Presupunem că $O_2 \notin H$.

Fie $H = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Dacă $X \in H$, atunci $XX_1XX_2...XX_n = X_1X_2...X_n$, de unde rezultă $(X^n - I_2)X_1X_2...X_n = O_2$, deci $X^n = I_2$. Este clar că $\det X = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Punem $a = \cos t, b = \sin t, t \in [0, 2\pi) \Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \Rightarrow H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \right\}.$

Dacă $O_2 \in H$, atunci $H' = H \setminus \{O_2\}$ verifică primul caz, iar

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n-1}, k = \overline{0, n-2} \right\} \cup \{O_2\}.$$

R.A.3. Dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ este o matrice, atunci $\det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}$.

Soluție. Din teorema *Hamilton-Cayley*, $X^2 - TrX \cdot X + \det X = O_2$, aplicând urma, obținem:

$$TrX^2 - (TrX)^2 + 2\det X = 0 \Rightarrow \det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}.$$

R.A.4. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice și $x \in \mathbb{C}$, atunci avem egalitatea:

$$\det(A + xB) = \det A + (TrA \cdot TrB - Tr(AB)) \cdot x + \det B \cdot x^2.$$

Soluție. Luând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, obținem:

$\det(A + xB) = \begin{vmatrix} a + xe & b + xf \\ c + xg & d + xh \end{vmatrix} = x^2(eh - gf) + x(ed + ah - bg - cf) + ad - bc =$

$= x^2 \det B + x(TrA \cdot TrB - Tr(AB)) + \det A.$

Consecința 1. Pentru $x = 1$, obținem că:

$$\det(A + B) = \det A + \det B + Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB),$$

astfel $\det(A + B) = \det A + \det B \Leftrightarrow Tr(A) \cdot Tr(B) = Tr(AB)$.

Consecința 2. Pentru $x \in \{-1,1\}$, avem că:

$$\det(A+B)-\det(A-B)=2\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right],$$

deci $\det(A+B)=\det(A-B) \Leftrightarrow TrA\cdot TrB=Tr(AB)$.

R.A.5. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB+BA=O_2$ și $\det(A+B)=0$. Arătați că $TrA=TrB=0$.

G.M.B.

Soluție. Avem $(A-B)^2=A^2+B^2=(A+B)^2$, de unde $\det(A-B)=0$. Cum $AB+BA=O_2$, rezultă că $Tr(AB)=0$. Relațiile $\det(A-B)=0=\det(A+B)$ implică $Tr(AB)=TrA\cdot TrB=0$ și $\det(A+B)=\det A+\det B=0$.
Presupunem că $TrA=0$. Din teorema *Hamilton-Cayley* rezultă:

$$(A+B)^2-Tr(A+B)(A+B)=O_2 \Rightarrow Tr(A+B)=0 \Rightarrow TrB=0.$$

R.A.6. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, iar $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ este o rădăcina de ordinul trei a unității, atunci $\left|\det(A+\varepsilon B)\right|^2=\det\left(A^2+B^2-BA\right)-\det(AB-BA)$.

Florin Stănescu, G.M.-B

Soluție. Folosind $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0, \varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}=1, \varepsilon+\overline{\varepsilon}=0, \frac{1}{\varepsilon^2}=\varepsilon$, putem scrie:

$$\left|\det(A+\varepsilon B)\right|^2=\det(A+\varepsilon B)\cdot\det\left(A+\overline{\varepsilon}B\right)=\det\left(A^2+B^2+\varepsilon BA+\overline{\varepsilon}AB\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\det\left(\varepsilon\left(A^2+B^2\right)-(1+\varepsilon)BA+AB\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\det\left(\varepsilon\left(A^2+B^2-BA\right)+AB-BA\right)\right)\underset{1}{=}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\det(AB-BA)+\varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)+$$

$$+\varepsilon\left(Tr\left(A^2+B^2-BA\right)\cdot Tr(AB-BA)-Tr\left[\left(A^2+B^2-BA\right)(AB-BA)\right]\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\det(AB-BA)-\varepsilon\left(Tr\left(A^3B-A^2BA+B^2AB-B^3A-BA^2B+(BA)^2\right)\right)+$$

$$+\varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)\Big]=$$

$$=\varepsilon\left(\det(AB-BA)+\varepsilon Tr\left(A^2B^2-(AB)^2\right)+\varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)\right)=$$

$= \varepsilon \det(AB - BA) + \varepsilon^2 Tr\left(A^2B^2 - (AB)^2\right) + \varepsilon^2 \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) =$

$= \varepsilon \det(AB - BA) + \varepsilon^2 \det(AB - BA) + \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) =$

$= \det(AB - BA)\left(\varepsilon + \varepsilon^2\right) + \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) = \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) - \det(AB - BA).$

Este evident că și $\left|\det(B + \varepsilon A)\right|^2 = \det\left(A^2 + B^2 - AB\right) - \det(AB - BA).$

R.A.7. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB.$

a) Arătați că $AB = BA$.

b) Arătați că $TrA = TrB.$

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A, B \in M_2(\mathbb{C}).$

a) Din enunț, avem: $A^2 + B^2 - 2AB = O_2 \Rightarrow 0 = \det\left(A^2 + B^2 - 2AB\right) =$

$= \det\left(A^2 + B^2 - AB - BA - (AB - BA)\right) = \det\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right) +$

$+ \det(AB - BA) - tr\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right) \cdot tr(AB - BA) +$

$+ tr\left[(AB - BA)\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right)\right] = \det(A - B)^2 + \det(AB - BA),$ deoarece $tr\left[(AB - BA)\left(A^2 + B^2 + AB + BA\right)\right] = 0.$ Tot din enunț obținem că:

$A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow (A - B)^2 = AB - BA \Rightarrow \det(A - B)^2 =$

$= \det(AB - BA),$ iar din $0 = \det(A + B)^2 + \det(AB - BA) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 2\det(AB - BA) \Rightarrow \det(AB - BA) = 0 \Rightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$

Cum $A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow (A - B)^2 = AB - BA \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - B)^4 = (AB - BA)^2 = O_2 \Rightarrow (A - B)^2 = O_2 \Rightarrow A^2 + B^2 - AB - BA = O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB - BA = O_2 \Rightarrow AB = BA.$

b) Cum $(A - B)^2 = O_2$, din teorema *Hamilton-Cayley* obținem că:

$$(A - B) \cdot Tr(A - B) = 0 \Rightarrow \left(Tr(A - B)\right)^2 = 0 \Rightarrow TrA = TrB.$$

R.A.8. Fie A, B două matrice de ordinul doi, având elemente numere reale, astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ și $BA = O_2$. Să se arate că $AB = O_2$.

Dinu Șerbănescu

Soluție. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină de ordinul trei a unității, atunci avem:

$\left|\det(A + \varepsilon B)\right|^2 = \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) - \det(AB - BA) = \det(AB) - \det(AB) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \det(A+\varepsilon B)=0 \Rightarrow \det A+\varepsilon\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\varepsilon^2\det B=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \det A=TrA\cdot TrB-Tr(AB)=\det B.$ Din $BA=O_2$ avem că cel puțin una dintre matricele A sau B are determinantul nul, de unde $\det A=TrA\cdot TrB-$ $-\ Tr(AB)=\det\ B\ =\ 0.$ Rezultă $A^2=TrA\cdot A$ și $B^2=TrB\cdot B,$ de unde, înlocuind în enunț, obținem $TrA\cdot A+TrB\cdot B=AB\Rightarrow(TrA)^2+(TrB)^2=Tr(AB)=$ $=\ Tr(A)\cdot Tr(B).$ Dacă $TrA\neq 0,$ atunci $1-\dfrac{TrB}{TrA}+\left(\dfrac{TrB}{TrA}\right)^2=0,$ deci $\dfrac{TrB}{TrA}$ este soluție pentru ecuația $1-x+x^2=0,$ deci $\dfrac{TrB}{TrA}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$ contradicție. Astfel: $TrA=0\Rightarrow TrB=0\Rightarrow AB=TrA\cdot A+TrB\cdot B=0.$

R.A.9. Fie $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$. Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate:

1. Dacă $A^2=O_2$, atunci $Tr(ACA)=0;$

2. Dacă $C^3=O_2,$ atunci $C^2=O_2;$

3. Dacă $A^2=B^2=AB=O_2,$ atunci $BA=O_2.$

Sorin Rădulescu și *Petruș Alexandrescu*

Soluție.

1. Avem $Tr(ACA)=Tr(A^2C)=0.$

2. Dacă λ_1,λ_2 sunt valorile proprii ale matricei C, din $C^3=O_2$ rezultă $\lambda_1=\lambda_2=0\overset{H.-Cayley}{\Rightarrow}C^2=O_2.$

3. Raționament asemănător problemei **R.A.5.**

R.A.10. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2+B^2=AB.$ Să se arate că:

$$(AB-BA)^2=O_2.$$

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A,B\in M_2(\mathbb{C}).$

Este clar că $\det(A^2+B^2)=\det(AB).$ Acum, plecând de la relația din enunț, putem scrie: $A^2+B^2=AB\Rightarrow A^2+B^2-(AB-BA)=BA\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \det\left(A^2+B^2-(AB-BA)\right)=\det(AB)\Rightarrow\det(A^2+B^2)+\det(AB-BA)-$

$-Tr(A^2+B^2)\cdot Tr(AB-BA)+Tr\left[(A^2+B^2)(AB-BA)\right]=\det(AB)\overset{\det(A^2+B^2)=\det(AB)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\ \det(AB-BA)=0$, deoarece $Tr(AB-BA)=0$, iar $Tr\left[\left(A^2+B^2\right)(AB-BA)\right]=$
$=Tr\left(A^3B-A^2BA+B^2AB-B^3A\right)=Tr\left(A^3B-A^3B\right)+Tr\left(B^3A-B^3A\right)=0.$

Acum, din teorema *Hamilton-Cayley*, $(AB-BA)^2-Tr(AB-BA)(AB-BA)+$
$+\ \det(AB-BA)\cdot I_2=0\Rightarrow\ (AB-BA)^2=O_2.$

R.A.11. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ două matrice, astfel încât $AB+BA=O_2$ și $O_2\notin\{A,B\}$. Arătați că $Tr(A)=Tr(B)=0$ sau $\det A=\det B=0$. Găsiți exemple de astfel de matrice, pentru care una dintre condiții să fie satisfăcută, iar cealaltă să nu fie adevărată.

Florin Stănescu

Soluție. Cum $AB+BA=O_2$, obținem că:

$$(A+B)^2=(A-B)^2\Rightarrow\left[\det(A+B)\right]^2=\left[\det(A-B)\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \left(\det A+\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\det B\right)^2=$$
$$=\left(\det A-\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\det B\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)\left(\det A+\det B\right)=0.$$

Analog, din $AB+BA=O_2\Rightarrow\det(A+iB)^2=\det(A-iB)^2\Rightarrow$
$$\Rightarrow\ \left(\det A-i\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right]-\det B\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \left(\det A+i\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right]-\det B\right)^2=$$
$$=\ \left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right]\left(\det A-\det B\right)=0.$$

Astfel, am obținut că:
$\alpha):\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)\left(\det A+\det B\right)=0$ și
$\beta):\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)\left(\det A-\det B\right)=0.$

a. Dacă $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$, folosind $AB+BA=O_2$, deci $Tr(AB)=0$, obținem că $TrA\cdot TrB=0$. Presupunem că $TrA=0$. Obținem că:
$O_2=TrB\cdot A\overset{A\neq O_2}{\Rightarrow}TrB=0$. Astfel, $Tr(A)=Tr(B)=0$.

b. Dacă $\det A+\det B=0$, din β putem avea că $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$, ceea ce conduce la $Tr(A)=Tr(B)=0$, sau $\det A-\det B=0$, ceea ce duce la: $\det A=\det B=0.$

Pentru $TrA=TrB=0,$ luăm $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$

$BA=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow AB+BA=O_2$. Se observă că $\det A\neq 0$ și $\det B\neq 0.$

Pentru $\det A=\det B=0,$ luăm $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow AB+BA=O_2.$

Se observă că $TrA\neq 0$ și $TrB\neq 0.$

R.A.12. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ și $C=(AB-BA)^2$. Arătați că:

$$C=O_2 \Leftrightarrow TrC=O_2.$$

Dorel Miheț

Soluție. „$\Rightarrow$” Dacă $(AB-BA)^2=O_2$, atunci $Tr(AB-BA)=0.$

„$\Leftarrow$” Fie $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $AB-BA.$ Este limpede că $\lambda_1+\lambda_2=0$. Cum $Tr(AB-BA)^2=0,$ atunci $\lambda_1^2+\lambda_2^2=0,$ de unde obținem $\lambda_1=\lambda_2=0$, iar din relația *Hamilton-Cayley* rezultă că $(AB-BA)^2=O_2$.

R.A.13. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ și $Tr(AB)=TrA\cdot TrB,$ atunci arătați că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\frac{\pi^2}{6}\det(A+B).$$

Mihai Opincariu

Soluție. Cum $Tr\left(\frac{1}{k}A\cdot\frac{1}{n-k}B\right)=Tr\left(\frac{1}{k}A\right)\cdot Tr\left(\frac{1}{n-k}B\right),$ atunci:

$\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\frac{1}{k^2}\det A+\frac{1}{(n-k)^2}B, (\forall)k=\overline{1,n-1},$ de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^2}\det A+\frac{1}{(n-k)^2}\det B\right)=$$

$$=\left[\det A+\det B\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right)\overset{Tr(AB)=TrA\cdot TrB}{=}\frac{\pi^2}{6}\det(A+B).$$

R.A.14. Arătați că $(AB-BA)^2\cdot C=C\cdot(AB-BA)^2, (\forall)A,B,C\in M_2(\mathbb{C}).$

Soluție. Cum $Tr(AB-BA)=0,$ din teorema *Hamilton-Cayley* avem că:

$(AB-BA)^2 = -\det(AB-BA)\cdot I_2,$ deci

$(AB-BA)^2\cdot C=-\det(AB-BA)\cdot I_2\cdot C=C\cdot\left[-\det(AB-BA)\cdot I_2\right]=$

$= (AB-BA)^2\cdot C,(\forall)A,B,C\in M_2(\mathbb{C}).$

R.A.15. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, atunci:

$$Tr(AB)^2=Tr\left(A^2B^2\right)\Leftrightarrow(AB-BA)^2=O_2.$$

Soluție. Putem scrie: $\det(AB-BA)=\dfrac{\left[Tr(AB-BA)\right]^2-Tr(AB-BA)^2}{2}=$

$=-\dfrac{Tr(AB)^2+Tr(BA)^2-Tr\left(AB^2A\right)-Tr\left(BA^2B\right)}{2}=-Tr(AB)^2+Tr\left(A^2B^2\right).$

Cum $(AB-BA)^2=-\det(AB-BA)\cdot I_2,$ acum este limpede că:

$Tr(AB)^2=Tr\left(A^2B^2\right)\Leftrightarrow(AB-BA)^2=O_2.$

R.A.16. Dacă $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A^2+B^2+C^2\right)\geq 0$, arătați că are loc inegalitatea:

$$\det\left(A^2+B^2-C^2\right)+\det\left(A^2-B^2+C^2\right)+\det\left(-A^2+B^2+C^2\right)\geq 0.$$

Soluție. În relația $\det(X+Y+Z)+\det X+\det Y+\det Z=$

$= \det(X+Y)+\det(Y+Z)+\det(Z+Y),(\forall)X,Y,Z\in M_2(\mathbb{C})$, înlocuind X cu $A^2+B^2-C^2$, Y cu $A^2-B^2+C^2$ și Z cu $-A^2+B^2+C^2$, obținem că:

$\det\left(A^2+B^2-C^2\right)+\det\left(A^2-B^2+C^2\right)+\det\left(-A^2+B^2+C^2\right)=$

$= 4\left[\det^2 A+\det^2 B+\det^2 C\right]\geq 0$.

R.A.17. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, atunci avem:

$$AB+BA=TrB\cdot A+\ TrA\cdot B+\ \left(Tr(AB)-TrA\cdot TrB\right)\cdot I_2.$$

Demonstrație. Se ia $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}$ și se efectuează calculele.

R.A.18. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, arătați că:

$$\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2.$$

Florin Stănescu

Soluție. Putem scrie:

$$\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2=$$

$$=\ \det^2 A+2\det\left(AB\right)+\det^2 B-\left(\det\left(A+B\right)-\det A-\det B\right)^2=$$

$$=\ 2\det\left(A+B\right)\left(\det A+\det B\right)-\det^2\left(A+B\right)=$$

$$=\ 2\det\left(A+B\right)\cdot\left[\frac{\det\left(A+B\right)+\det\left(A-B\right)}{2}\right]-\det^2\left(A+B\right)=$$

$$=\ \det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right].$$

Prin urmare:

$$\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(A^2-B^2\right)=\det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right].$$

Cum $\det\left(A^2-B^2\right)=\det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right]-\det\left(AB-BA\right)$, obținem că $\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(AB-BA\right)=0$, o echivalență adevărată.

R.A.19. Dacă $A,B\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ și $\det\left(AB-BA\right)=0$, atunci au loc următoarele inegalități:

a) $\det\left(A^2-B^2\right)\le\left(\det A+\det B\right)^2$;

b) $\det\left(A^2+B^2\right)\ge\left(\det A-\det B\right)^2$.

Cezar Lupu

Soluție. a) Din problema precedentă obținem identitatea:

$$\det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2-\det\left(AB-BA\right),$$

ceea ce implică faptul că:

$$\det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2\le\left(\det A+\det B\right)^2.$$

b) În identitatea anterioară, înlocuind pe B cu iB, obținem că:

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\left(\det A-\det B\right)^2+\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2+\det\left(AB-BA\right),$$

de unde:

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\left(\det A-\det B\right)^2+\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2\ge\left(\det A-\det B\right)^2.$$

R.A.20. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ și mulțimea

$$C(A)=\left\{X\in M_3(\mathbb{C})\middle|AX=XA\right\}.$$

a) Să se arate că, dacă $X\in M_3(\mathbb{C})$, atunci există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=aI_3+bA+cA^2$.

b) Să se arate că, dacă $X\in C(A)$ și $X^{2004}=O_3$, atunci $X=O_3$.

Soluție. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, atunci din $AX=XA$ obținem că $d=h=c$, $e=i=a$ și $f=g=a$, de unde obținem că $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}=aI_3+bA+cA^2$.

b) Dacă $X\in C(A)$ și $X^2=O_3$, atunci $a^2+2bc=b^2+2ac=c^2+2ab=0$, deci $a^3=b^3=c^3=-2abc$, de unde $|a|=|b|=|c|$ și $|a|^3=2|a|^3\Rightarrow a=b=c=0$. Astfel, am arătat că, dacă $X\in C(A)$ și $X^2=O_3$, atunci $X=O_3$. Este ușor de arătat că, dacă $X\in C(A)$, atunci $X^k\in C(A),(\forall)k\in\mathbb{N}^*$. În final, cum $X^{2004}=O_3\Rightarrow\left(X^{1002}\right)^2=O_3\Rightarrow X^{1002}=O_3\Rightarrow X^{501}=O_3\Rightarrow X^{502}=O_3\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(X^{251}\right)^2=O_3\Rightarrow X^{251}=O_3\Rightarrow....\Rightarrow X^2=O_3\Rightarrow X=O_3$.

R.A.21. Fie $A\in M_3(\mathbb{R})$ cu $\det A=1$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\det\left(A^2-A+I_3\right)=0$;

b) $\det\left(A+I_3\right)=6$ și $\det\left(A-I_3\right)=0$.

Soluție.

„$\Rightarrow$” Fie $f(x)=\det\left(xI_3-A\right)=x^3+ax^2+bx-1$. Cum $\det\left(A^2-A+I_3\right)=0$, atunci $\det\left(A-\varepsilon I_3\right)\cdot\det\left(A-\overline{\varepsilon}I_3\right)=0$, unde ε este rădăcina de ordin trei a unității. Prin urmare, $f(\varepsilon)=f\left(\overline{\varepsilon}\right)=0$, ceea ce implică $a=-2$ și $b=2$.

Astfel, $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$, de unde rezultă că $\det(A+I_3)=-f(-1)=6$ și $f(1)=0$.

„⇐” Dacă $f(-1)=-6$ și $f(1)=0$, atunci $f(x)=x^3-2x^2+2x-1$. Rezultă că $f(\varepsilon)\cdot f(\overline{\varepsilon})=0$, ceea ce implică $\det(A^2-A+I_3)=0$.

R.A.22. Se consideră $P(x)=\det(A+xB)$ și $A,B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB+BA=O_3$. Arătați că $P(i)\in\mathbb{R}$ sau $\dfrac{P(i)}{i}\in\mathbb{R}$.

Soluție. Avem $P(x)=\det A+ax+bx^2+x^3\det A$, de unde obținem că:

$P^2(x)=\det(A^2+x^2B^2)=(\det A)^2+mx^2+nx^4+x^6\det^2 B=$

$=(\det A+ax+bx^2+x^3\det A)^2$, iar prin identificarea coeficienților obținem că $a\det A=b\det B=0$ și $\det A\cdot\det B+ab=0$. Prin urmare:
$(b-\det A)(a-\det B)=0$. Cum $\operatorname{Re}P(i)=-b+\det A$ și $\operatorname{Im}P(i)=-b+\det A$, atunci fie $P(i)\in\mathbb{R}$, fie $\dfrac{P(i)}{i}\in\mathbb{R}$.

R.A.23. Fie matricele $A,B\in M_3(\mathbb{Z})$ astfel încât $(\forall)k\in\{0,1,...,8\}$, matricele $A + kB$ sunt inversabile, inversele lor având elemente numere întregi.
Demonstrați că matricea $A + 2004B$ este inversabilă și că inversa sa are, de asemenea, elemente numere întregi.

Soluție. Este limpede că, dacă $X\in M_3(\mathbb{Z})$ este inversabilă, atunci $\det X=\pm1$. Fie polinomul $g(x)=\det(A+xB)\in\mathbb{Z}[X]$, de grad cel mult trei. Cum $f(0),f(1),...,f(8)\in\{-1,1\}$, atunci cel puțin patru din aceste elemente vor avea toate valoarea 1 sau toate valoarea -1. Prin urmare, în ambele cazuri obținem un polinom constant, $f(x)=1,(\forall)x\in\mathbb{Z}$ sau $f(x)=-1,(\forall)x\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $f(2004)=1$ sau $f(2004)=-1$, ceea ce arată că matricea $A + 2004B$ este inversabilă și că inversa sa are, de asemenea, elemente numere întregi.

R.A.24. Fie $A\in M_4(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, astfel încât $TrA=TrA^*\neq0$. Arătați că matricea A^2+I_4 este singulară dacă și numai dacă există o matrice nenulă $B\in M_4(\mathbb{R})$, astfel încât $AB=-BA$.

Marian Andronache

Soluție.

„$\Rightarrow$” Cum $\det\left(A^2+I_4\right)=0$, atunci i este o valoare proprie pentru A, iar $-i$ este o valoare proprie pentru A^t. Astfel, există $X,Y\in M_{n,1}\left(\mathbb{C}\right), X,Y\neq O_{n,1}$, astfel $AX=iX$ și $A^tY=-iY$. Este clar că $B=XY^t\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. Atunci:

$AB=AXY^t=iXY^t=-X\left(-iY\right)^t=-XY^tA=-BA$. Întrucât $AB=-BA$, atunci $A\overline{B}=-\overline{B}A$, deci $A\frac{1}{i}\left(B-\overline{B}\right)=\frac{1}{i}\left(B-\overline{B}\right)A$, unde $\overline{B}$ este conjugata matricei A. Prin urmare, B sau $\frac{1}{i}\left(B-\overline{B}\right)$ anticomută cu A.

„$\Leftarrow$” Fie B o matrice astfel încât $AB=-BA$. Prin inducție, obținem că $A^kB=$ $=\left(-1\right)^kBA^k$, $\left(\forall\right)k\geq 1$. Fie $f=X^4-TrA\cdot X^3+aX^2-TrA\cdot X+\det A, a\in\mathbb{R}$ polinomul caracteristic al matricei A. Avem că:

$A^4-TrA\cdot A^3+aA^2-TrA\cdot A+\det A=O_4\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(A^4-TrA\cdot A^3+aA^2-TrA\cdot A+\det A\right)B=$

$=O_4=B\left(A^4-TrA\cdot A^3+aA^2-TrA\cdot A+\det A\right)$, ceea ce implică:

$2TrA\cdot B\left(A^2+I_4\right)A=O_4\Rightarrow B\left(A^2+I_4\right)=O_4$.

Întrucât $B\neq O_n$, obținem că $\det\left(A^2+I_4\right)\neq 0$.

R.A.25. Fie $A,B\in M_4\left(\mathbb{R}\right)$ astfel încât $AB=BA$ și $\det\left(A^2+AB+B^2\right)=0$. Arătați că $\det\left(A-B\right)+3\det\left(A+B\right)=6\det A+6\det B$.

Rică Zamfir

Soluție.

Fie $p\left(X\right)=\det\left(A+XB\right)=\det B\cdot X^4+c_1X^3+c_2X^2+c_1X+\det A\in R\left[X\right]$.

Cum $A^2+AB+B^2=\left(A-\varepsilon B\right)\left(A-\varepsilon^2B\right),\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\varepsilon^3=1$, obținem că $p\left(-\varepsilon\right)=p\left(-\varepsilon^2\right)=0$. Astfel, $p\left(-\varepsilon\right)=0\Rightarrow\det A-c_1-c_2+\varepsilon\left(\det B-c_2-c_3\right)=0$, de unde $\det A=c_1+c_2,\det B=c_2+c_3$, ceea ce implică $\det A+\det B=c_1+2c_2+c_3$.

În final, $\det\left(A-B\right)+3\det\left(A+B\right)=p\left(-1\right)+3p\left(1\right)=\det B-c_1-c_2-c_3+$

$+\det A+3\left(\det B+c_1+c_2+c_3+\det A\right)=$

$=4\det A+4\det B+2\left(c_1+2c_2+c_3\right)=6\det A+6\det B$.

Probleme propuse

A.I.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

A.I.2. Fie $M = (m_{ij})$ o matrice pătratică reală de ordinal doi astfel încât $\det M = m_{11} + m_{22} = 1$. Aflați elementele mulțimii $\{M^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

A.I.3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ și $A^n = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că:

a) dacă $a + d$ este par, atunci $x + t$ este par;

b) dacă $a + d$ și $b + c$ sunt impare, atunci $x + t$ este impar.

Romeo Ilie

A.I.4. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, știind că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7a \end{pmatrix}$ are exact două soluții în $M_2(\mathbb{C})$.

M. Andronache

A.I.5. Fie o matrice pătratică de ordinal 2 cu coeficienți complecși, astfel încât $Tr(A) = Tr(A^2) = 0$. Să se arate că:

$$\det(A^n + I_2) + \det(A^n - I_2) = 2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Cristian Grecu

A.I.6. Considerăm matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $Tr(A) = Tr(B)$ și $\det(A) = \det(B)$. Dacă f, g sunt două polinoame neconstante, cu coeficienți reali, atunci demonstrați că:

$$\det\left[\left(f(A) - f(B)\right)\left(g(A) - g(B)\right)\right] \geq 0.$$

A.I.7. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), a + d \neq 0$ și $\det A = 0$, iar $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, astfel încât $A^n \cdot B = B \cdot A^n$. Arătați că $A \cdot B^n = B^n \cdot A$.

Anița Alice

A.I.8. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $(AB - BA)^2 = AB - BA$. Arătați că $AB = BA$.

Mihai Opincariu

A.I.9. Fie $\mathrm{M}=\left\{X\in M_2(\mathbb{R})\middle| X=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\right\}$ și $z=a+b\varepsilon,$ unde $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$ Considerăm funcția $f:\mathbb{C}\to \mathrm{M}, f(z)=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}=X.$

Să se arate că $f(z^n)=X^n,(\forall)n\geq 1$, și să se calculeze $A^n,n\geq 1$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$

A.I.10. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha\\ 2 & 3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} x & \beta\\ y & z\end{pmatrix},$ unde $x,y,z\in\mathbb{Q}_+^*,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$ Știind că $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $A^n=B^n,$ să se arate că $A=B.$

Emil Vasile

A.I.11. Rezolvați în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația: $X^2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

A.I.12. Fie șirurile $(u_n)_{n\geq 1}$ și $(v_n)_{n\geq 1}$ definite prin relația:

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n\\ -v_n & u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{n} & \frac{\pi}{4n}\\ -\frac{\pi}{4n} & 1+\frac{1}{n}\end{pmatrix}^n,n\geq 1.$$

Găsiți expresiile termenilor generali ai șirurilor și aflați limitele lor.

A.I.13. În $M_2(\mathbb{R})$ considerăm matricele $A_k=2k^2\cdot I_2+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot A,$ unde $k\in\mathbb{N}^*$, iar $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$ Dacă $\begin{pmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{n}A_k$, arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}==\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Florin Stănescu

A.I.14. Fie matricea $A\in M_2(\mathbb{C}).$ Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{N}$, avem:

$$\det(A^p+I_2)=\det{}^p(A)+\ Tr(A^p)+1.$$

Gheorghe Bordea

A.I.15. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = 1$. Să se arate că:

$$\det(A^2 + I_2) + \det(A^2 + 2A - I_2) = 8.$$

Traian Tamâian

A.I.16. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, cu $\det A = d \neq 0$, astfel încât $\det\left(A + dA^*\right) = 0$. Să se arate că $\det\left(A - dA^*\right) = 4$.

Daniel Jinga

A.I.17. Fie $x > 0$ un număr real și A o matrice pătratică de ordinul 2, care are elemente reale și verifică relația $\det(A^2 + xI_2) = 0$. Demonstrați că:

$$\det(A^2 + A + xI_2) = x.$$

Dan Nedeianu

A.I.18. Dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$, să se arate că $\det\left(A^2 + A + I_2\right) \geq \frac{3}{4}(1 - \det A)^2$.

Dan Nedeianu

A.I.19. Se consideră numerele reale a, b, cu $b - a^2 > 0$. Determinați toate matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A^2 - 2aA + bI_2\right) = 0$.

Radu Gologan

A.I.20. Fie A și B două matrice de ordinul 2 cu coeficienții complecși. Arătați că, dacă $\det(A + 2B) = \det(2A + B)$, atunci $\det A = \det B$.

A.I.21. Fie $t \in (0, \pi)$ un număr real și $n \geq 2$ un număr natural. Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuația:

$$X^n = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Concursul „Al. Papiu-Ilarian"

A.I.22. Fie a, b două numere natural nenule, astfel încât numărul $a^2 + b^2$ să fie pătrat perfect. Notăm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n$ cu $\begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}, n \geq 2$. Arătați că $b_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Vasile Pop

A.I.23. Fie A o matrice de ordinul 2 cu elemente reale și λ_1, λ_2 rădăcinile polinomului $P = \det(A - \lambda I_2)$. Arătați că:

$$\left(A - \lambda_1 I_2\right)^{2n} + \left(A - \lambda_2 I_2\right)^{2n} = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^{2n} I_2.$$

Concursul „Matematica de drag"

A.I.24. Se consideră matricea $A_a = \begin{pmatrix} \cos 2a\pi & -\sin 2a\pi \\ \sin 2a\pi & \cos 2a\pi \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$

a) Arătați că există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât dacă și numai dacă $a \in \mathbb{Q}$.

b) Fiind dat un număr $n \in \mathbb{N}^*$, atunci arătați că $n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \middle| A_a^k = I_2\right\}$ dacă și numai dacă $a = \frac{b}{n}$, cu $b \in \mathbb{Z}$, $(b,n) = 1$.

Concursul „Teodor Topan"

A.I.25. Se consideră mulțimea G a matricelor $A \in M_2(\mathbb{C})$ de forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a,b \neq 0.$ Determinați submulțimile $H \subset G$ cu șapte elemente, care au proprietatea că $BC \in H$, oricare ar fi $B, C \in H$.

Concursul „Teodor Topan"

A.I.26. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $\det A$ și $\det(A+B)$ sunt numere întregi impare. Arătați că: $\det(A + xB) \neq 0, (\forall) x \in \mathbb{Z}.$

Concursul „Sinus"

A.I.27. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), (a-d)^2 + 4bc = 0.$ Arătați că există $n \in \mathbb{N}$, astfel ca $A^n \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (\forall) n > N.$

Festivalul Internațional de Matematică și Informatică

A.I.28. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care există un număr natural $k \geq 2$, astfel încât $\det\left(A^k - B^k\right) = \det\left(A^k - B^k + AB - BA\right)$. Arătați că $(AB - BA)^k = O_2$.

Florin Stănescu, Concursul „Grigore Moisil"

A.I.29. Pentru orice matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ și orice număr natural *n*, se notează $f(n) = \det\left(A^n + I_2\right)$ și $g(n) = \det\left(A^n - I_2\right)$.

a) Dați exemplu de o matrice pentru care $f(2) = 0$.

b) Arătați că, dacă există $A \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $f(2) = g(2)$ și $f(3) = g(3)$, atunci $A^2 = O_2$.

G.M.-B

A.I.30. Notăm cu G mulțimea matricelor din $M_2(\mathbb{Z})$ cu determinantul nenul. Fie $A, B \in G$. Spunem că A divide B și notăm $A \mid B$ dacă și numai dacă există $X, Y \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $B = XAY$.

a) Arătați că, dacă $A \mid B$, atunci $\det A \mid \det B$. Este adevărată reciproca?

b) Dacă $A \mid B$ și $|\det A| = |\det B|$, atunci $B \mid A$.

c) Dacă $p \mid \det A, p \in \mathbb{Z}^*$, atunci $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Big| A$.

Raluca și *Marius Mohonea*

A.I.31. a) Dacă matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ satisface relația $A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_2$, arătați că $Tr(A) = 2$.

b) Arătați că există matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_2$ și $Tr(A) \neq 2$.

Dan Popescu

A.I.32. Se consideră matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică simultan relațiile: $X - Y = I_2$, $X^3 - Y^3 = 4I_2$. Arătați că:

a) $Y^{-1} = X$;

b) $X^5 - Y^5 = 11I_2$ și $\left(X^3 - X\right)^n = \left(Y + 2I_2\right)^n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Florin Pană

A.I.33. Determinați matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $AB - BA^T = I_2$.

A.I.34. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ matrice cu elemente strict pozitive. Arătați că, dacă $(AB)^2 = (BA)^2$, atunci $AB = BA$.

A.I.35. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, atunci:

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B).$$

A.I.36. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $Tr(A) \cdot \det(A) \neq 0$.

a) Arătați că funcția $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), f(X) = AX + XA$ este bijectivă.

b) Determinați toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea:

$$A(AX + XA) + (AX + XA)A = A\left(AX^2 + X^2 A\right) + \left(AX^2 + X^2 A\right)A.$$

Gabriel Necula

A.I.37. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile:

i) $Tr(A) = \sqrt{502}$; **ii)** $\det A = 4 + \sqrt{3}$.

Calculați $\det\left(A^2 + 4I_2\right)$.

Mihai Totolici

A.I.38. Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $TrA = 1$ și $\det A = 2$, arătați că:

$$\det\left(A^2 - I_2\right) + \det\left(A^2 + I_2\right) + \det\left(A^2 + 2I_2\right) = 12.$$

Traian Tamâian

A.I.39. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(A + I_2) = \det\left(A^2 + I_2\right)$, atunci $\det A$ și TrA iau valori în intervale de lungime egale.

A.I.40. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det\left(A^{2011} + I_2\right) = \det\left(A^{2011} - I_2\right)$ și $\det\left(A^{2011} + I_2\right) \cdot \det\left(A^{2011} - I_2\right)$. Arătați că:

$$A^2 = O_2.$$

A.I.41. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A < \det B$. Arătați că:

$$\det A + \det(B - 2011A) < \det B + \det(B - 2011A).$$

Traian Duță

A.I.42. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice, arătați că:

$$\det^2(A + B) = \det\left(A^2 + 2AB + B^2\right) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

Florin Stănescu

A.I.43. a) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, să se calculeze: $Tr(AB - BA)$.

b) Dacă $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^3 = O_3$, să se calculeze:

$$Tr\left(A^2BA\right) \text{ și } Tr\left(ABA^2\right).$$

c) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + A + I_2 = O_2$. Să se calculeze:

$$Tr\left(A^{2004}\right) \text{ și } Tr\left(A^{2005}\right).$$

Concursul „Arhimede”

A.I.44. a) Determinați $A \in M_2(\mathbb{R})$, știind că $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, apoi calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se determine $A \in M_2(\mathbb{C})$, știind că $A^2 = A$ și $Tr(A) = 2$.

c) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ și $A^2 - 2A + I_2 = O_2$, să se calculeze $(I_2 - A^3)(I_2 - A^4)$ și TrA

Aurel Doboșan

A.I.45. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, cu $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$. Să se arate că:

$$\det A = \det B.$$

R.M.T.

A.I.46. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, cu $A^2 + B^2 + 2AB = O_2$. Să se arate că:

$$\det(trA \cdot A - trB \cdot B) = 0.$$

G.M.-B

A.I.47. Să se determine $X \in M_2(\mathbb{R})$, pentru care: $X^7 = \begin{pmatrix} 56 & 64 \\ 63 & 72 \end{pmatrix}$.

Aurel Doboșan

A.I.48. Să se determine matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că:

$$\det(A^2 + pI_2) = 0, \text{ unde } p \text{ este număr prim.}$$

Willy Portal

A.I.49. a) Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $\det(I_2 + A^2) = 0$. Să se calculeze $\det A$.

b) Fie $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{N})$, cu proprietatea că $XY - Z^2 = YZ - X^2 = ZX - Y^2 = I_2$. Arătați că X, Y, Z sunt inversabile în $M_2(\mathbb{Q})$.

Marius Mâinea

A.I.50. Să se arate că există $C \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^* = C \cdot A^t \cdot C^{-1}$ pentru orice $A \in M_2(\mathbb{C})$ și să se determine toate matricele C care au această proprietate.

Ovidiu Munteanu

A.I.51. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^p = O_2$.

b) există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} a\cos b & a(1+\sin b) \\ a(-1+\sin b) & -a\cos b \end{pmatrix}$.

A.I.52. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ două matrice, cel puțin una neinversabilă, astfel încât $A^2 + 3AB + B^2 = BA$. Arătați că $Tr(AB) = Tr(A) \cdot Tr(B)$.

Florin Stănescu

A.I.53. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că $AB+BA=I_2$. Arătați că $\det\left[(AB)^n+(BA)^n\right]$ este pătrat perfect pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Marius Drăgan

A.I.54. a) Să se determine toate matricele $X\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea:

$$X^{2n}=2^n\cdot I_2,(\forall)n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Să se arate că nu există o matrice $X\in M_3(E)$; $E=\{-1,0,1\}$ astfel încât: $X^k=2^k\cdot I_3$, pentru $k\in\mathbb{N}^*,k$ fixat.

A.I.55. Se consideră ecuația $X^2=A, A\in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că:

a) dacă $\det A<0$, atunci ecuația nu are soluții;

b) dacă $\det A>0$ și $TrA>2\sqrt{\det A}$, atunci ecuația are patru soluții;

c) dacă $\det A>0$ și $0<TrA<2\sqrt{\det A}$, atunci ecuația are două soluții.

Sabin Tâbârcă

A.I.56. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB=BA$ și $\det(A+B)=$ $=\det(A+2B)=\det(A+3B)$. Să se arate că $B^2=O_2$.

A.I.57. Se consideră $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ și fie $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente, atunci $\det A\in(-1,1)$ sau $A=I_2$.

Vasile Pop

A.I.58. Considerăm mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\middle| a\cdot b=c\cdot d\right\}$.

a) Dați exemplu de o matrice A din mulțimea M, astfel încât:

$$A^{2017}\in M, A^{2019}\in M,\text{ iar } A^{2018}\notin M.$$

b) Pentru o matrice $A\in M$, dacă există $k\in\mathbb{N}, k>2$, astfel încât A^{k-2},A^{k-1} și A^k aparțin mulțimii M, arătați $A^n\in M,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Florin Stănescu, O.J.M.

A.I.59. Considerăm $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $aAB-bBA=A$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $|a|\neq|b|$. Arătați că are loc egalitatea:

$$A^2=\frac{1}{a-b}ABA.$$

Florin Stănescu

A.I.60. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ și $\det\left(A^2 + B^2\right) = 0.$ Arătați că $\det A = \det B.$

Cristinel Mortici, G.M.-B

A.I.61. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu toate rădăcinile aparținând lui $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\det f(A) = 0.$ Arătați că $f(A) = O_2.$

A.I.62. Fie $n \in \mathbb{N}^*.$ Pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., n\}$, se consideră matricele A_k, B_k astfel încât $A_k \cdot B_k = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det\left(\sum_{k=1}^{n}\left(B_k A_k + A_k^{-1} B_k^{-1}\right)\right).$

Niculae Mușuroaia

A.I.63. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta > 0$ și matricea $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

a) Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, avem: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^n = x_n \cdot I_2 + y_n \cdot V$, cu $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ șiruri de numere reale.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}.$

A.I.64. Calculați X^n, dacă $n \in \mathbb{Z}$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$

Aurel Ene

A.I.65. Determinați toate mulțimile $\mathrm{A} = \{A, B, C\}$, cu proprietățile:

a) $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$, nesingulare;

b) $(\forall) X, Y \in \mathrm{A} \Rightarrow XY \in \mathrm{A}.$

M. Piticari și I. Bălășan

A.I.66. a) Dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$, atunci $\det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}.$

b) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$, atunci propozițiile următoare sunt echivalente:

$p_1 : Tr(XY) = TrX \cdot TrY$

$p_2 : \det(X - Y) = \det(X + Y)$

$p_3 : \det(X + Y) = \det X + \det Y.$

c) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$, atunci $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2(\det X+\det Y)$.

d) Dacă $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{C})$, atunci:

$$\det(X+Y+Z)+\det X+\det Y+\det Z=\det(X+Y)+\det(Y+Z)+\det(Z+Y).$$

A.I.67. Fiind date matricele $X_1, X_2, ..., X_n \in M_2(C), n \geq 2,$ atunci are loc egalitatea:

$$\det(X_1+X_2+...+X_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\det(X_i+X_j)-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}\det X_i\right).$$

Florin Stănescu

A.I.68. Dacă $X_1, X_2, ..., X_n \in M_2(C), n \geq 2,$ atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\sum_{1\leq i<j\leq n} TrX_i \cdot TrX_j = Tr\left(\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i \cdot X_j\right)$;

b) $\det(X_1+X_2+...+X_n)=\det X_1+\det X_2+...+\det X_n$;

c) $\sum_{1\leq i<j\leq n}\det(X_i+X_j)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\det(X_i-X_j)$;

d) $n\cdot\det(X_1+X_2+...+X_n)=\det(X_1-X_2-...-X_n)+\det(X_2-X_1-...-X_n)+$
$+\ldots+\ \det(X_n-X_1-...-X_{n-1})$;

e) $\sum_{1\leq i<j\leq n}\det(X_i+X_j)=(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\det X_i\right)$;

f) $(n-1)\det(X_1+X_2+...+X_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\det(X_i-X_j)$.

Florin Stănescu

A.I.69. Fie matricele $X_1, X_2, ..., X_n \in M_2(\mathbb{C}), n \geq 3$.

a) $\det(X_2+X_3+...+X_n)+\det(X_1+X_3+...+X_n)+...+\det(X_1+X_2+...+X_{n-1})=$

$$= (n-2)\det(X_1+X_2+...+X_n)+\left(\sum_{i=1}^{n}\det X_i\right).$$

b) Dacă $\det\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} X_i\right)=\det X_k, (\forall) k=\overline{1,n},$ atunci $\det(X_1+X_2+...+X_n)=0$;

Bibliografie

[1] Andrei Gh., Caragea C., Bordea Gh., *Algebra pentru concursurile de admitere și olimpiade școlare*, Editura TopAZ, Constanța, 1993.

[2] Alexandrescu P., Goșonoiu N.M., Alexandrescu C., Rădulescu S., Frunjină I., *Arhimede...*, Editura Cartex, București, 2008.

[3] Andronache M., Schwarz D., Gologan R., Șerbănescu D., *Olimpiada de Matematică 2006-2010. Etapele județeană și națională*, Editura Sigma, 2010.

[4] Chiteș A., Dospinescu G., Ismail A., Kreindler G., Popa C., Raicu C., Zahariuc A., *Probleme alese de matematică pentru pregătirea Olimpiadei Naționale*, Editura Gil, Zalău, 2010.

[5] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Calculul matricial*, trad. Aurelia Cipu și Mihai Cipu, Editura Theta, București, 2005.

[6] Gologan R. (coord.), *Matematică: olimpiade și concursuri școlare*, *clasele IX-XII*, Editura Paralela 45, 2010-2014.

[7] Iurea G., Popa G., Nechita V. și colaboratorii, *Concursuri ieșene*, Editura Gil, Zalău, 2006.

[8] Lăduncă L.G., *Borne pentru matematicieni. Algebră-Analiză. Clasele IX-XII*, Editura Taida, Iași.

[9] *Matematica în concursurile școlare*, *clasele IX-XII*, Editura Paralela 45, Pitești, 1996-2005.

[10] Mortici C., *600 de probleme de matematică pentru concursuri*, Editura Gil, Zalău, 2001.

[11] *Olimpiadele de matematică*, *clasele XI-XII*, Editura Gil, Zalău, 2000-2007.

[12] *Olimpiadele și concursurile de matematică*, *clasele IX-XII*, Editura Bîrchi, 2000-2009.

[13] Petru Rotaru, *Determinanți micști. Culegere de matematică pentru liceu*, Editura Taida, Iași, 2010.

[14] Pop Vasile, *Algebră liniară. Matrice și determinanți. Pentru elevi, studenți și concursuri*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2007.

[15] Pop V., Lupșor V., Mușuroia N., Boroica Gh., Jecan E., Lobonț Gh., *Matematică pentru grupele de performanță*, *clasa a XI-a*, Editura Dacia Educațional, Cluj-Napoca, 2003.

[16] Roger A. Horn, Charles R. Johnson, trad. Ingrid Beltiță, Daniel Beltiță, Radu Gologan, *Analiză matricială*, Editura Theta, București, 2001.
[17] Stănescu F., *Pasiune și creativitate în matematică. 272 de probleme din Gazeta Matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2013.
[18] Șontea Ovidiu, *Elemente de algebră liniară*. *Probleme pentru examene, concursuri și olimpiadă*, Editura Gil, Zalău, 2016.
[19] Colecția revistei *Gazeta Matematică.*
[20] Colecția revistei *RMT.*
[21] Colecția revistei *Minus.*
[22] Colecția revistei *Recreații Matematice.*
[23] *MathLinks – Art of Problem Solving*.

Cuprins